

Radontransformationen als Faltungsoperatoren auf Gruppen

Ernst Matthias Kulessa

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Radontransformationen als Faltungsoperatoren auf Gruppen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von

Ernst Matthias Kulesa

München, November 1985

1. Berichterstatter: Prof. Dr. U. Oppel

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. G. Kellerer

Einreichung der Dissertation: 15. November 1985

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juni 1986

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	iii
I. Radontransformationen als Faltung: R_μ -Transformationen	1
I.1 Die Gruppe X , Haar-Maß und Faltung	2
I.2 Die Radontransformation R_μ auf $L^p(X, \lambda_X)$	5
I.3 Die duale Gruppe Γ und die Fouriertransformation	8
I.4 Injektivität der Radontransformation auf L^1 und L^2	13
II. Beispiel: Eine Familie von Radontransformationen auf $\mathbb{R}^2$, Integration über α -Kurven	19
II.1 α -Kurven	20
II.2 Die Transformationen R_α und ihre Eigenschaften	23
II.3 Darstellung der Radontransformationen R_α als Faltungsoperatoren	28
II.4 Inversion der R_α -Transformationen	44
III. Beispiel: Das Pompeiu-Problem und die Pompeiu-Transformation	47
III.1 Die Pompeiu-Transformation auf $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$)	48
III.2 Pompeiu-Transformationen mit kompaktem Träger	53
IV. Radontransformationen als Mischungen von Faltungen: R_K -Transformationen	58
IV.1 Die Radontransformationen R_K auf L^p	58
IV.2 Invertibilität der R_K -Transformationen	62
V. Beispiel: Eine Familie von Radontransformationen auf $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), Integration über α -Hyperflächen	66
V.1 α -Hyperflächen	67
V.2 Die Radontransformationen R_α und ihre Eigenschaften	70

V.3 Darstellung der R_α -Transformationen als gemischte Faltungsoperatoren	76
V.4 Kugelfunktionen und das Funk-Hecke-Theorem	86
V.5 Inversion der R_α -Transformationen	92
V.6 Der Zusammenhang zwischen R_α und $R_{-\alpha}$	95
VI. Beispiel: Die Funktransformation	98
VI.1 Die Funktransformation F und ihre Eigenschaften	99
VI.2 Darstellung der Funktransformation als gemischter Faltungsoperator	102
VI.3 Kugelfunktionen als Eigenvektoren der Funktransformation	109
Anhang	111
Beweis von Satz I.1.6	112
Darstellung ausgewählter α -Kurven	113
Bezeichnungen und Symbole	118
Literaturverzeichnis	122

Zusammenfassung

An den Anfang dieser Zusammenfassung sei ein kurzer Überblick gestellt, in dem einige Ergebnisse und Anwendungen der siebenzig Jahre alten Theorie der Radontransformationen vorgestellt werden.

Einen Anfang bilden zwei Arbeiten:

Zum einen die von Hilbert angeregte Dissertation von Funk [12] aus dem Jahre 1911, in der sich Funk mit dem Problem beschäftigt, inwieweit eine Funktion auf der Sphäre S^2 durch ihre Integrale längs aller Großkreise bestimmt ist. Anwendungen im Bereich der Geophysik werden diskutiert in Arbeiten von Backus [1, 1964] und Campi [4, 1981].

Zum anderen die inzwischen berühmte Arbeit von Radon "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten" (1917), die mehrfach nachgedruckt wurde (siehe z.B. Helgason [13]). Diese Arbeit wird als Basis der Entwicklung einer mathematischen Theorie - nämlich der der Radontransformationen - betrachtet, welche viele Anwendungen im Gebiet der Differentialgeometrie, der partiellen Differentialgleichungen und der Stochastik hat und die Grundlage darstellt für wichtige Anwendungen in der Radioastronomie, der Lasertechnologie und vor allem der Computertomographie.

Die von Radon untersuchte Transformation R , die heute als klassische Radontransformation bezeichnet wird, ordnet einer geeigneten Abbildung f auf $\mathbb{R}^n$ für jedes $\omega \in S^{n-1}$ und $t \in \mathbb{R}$ das Integral von f über die zu ω orthogonale affine Hyperebene $H(\omega, t)$ mit dem Aufpunkt $t \cdot \omega$ zu.

Die Frage nach der Umkehrbarkeit der klassischen Radontransformation wird von Radon positiv beantwortet (durch Rückführung auf

eine Abelsche Integralgleichung). Weitere Lösungen werden im folgenden noch mehrfach unabhängig wiedergefunden. Dabei spielt insbesondere das von Cramer-Wold 1936 bewiesene "Projektionstheorem" $\left[\hat{\mu}(t\omega) = [\mu \circ \langle \omega, \cdot \rangle^{-1}]^{\wedge}(t) \right]$ eine wichtige Rolle.

Anwendungen der Radontransformation zur Behandlung partieller Differentialgleichungen werden von John (1934) betrachtet und später z.B. von Gelfand und Helgason verallgemeinert. Die klassische Radontransformation erlaubt die Reduktion partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche:

$$R(\partial f / \partial x_k)(\omega, t) = \omega_k \cdot \partial(Rf) / \partial t(\omega, t)$$

$$\text{für } \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in S^{n-1} \text{ und } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Außerdem werden formale und tiefe Beziehungen der Radontransformation zur Fouriertransformation entdeckt, die auch für die vorliegende Arbeit von besonderer Bedeutung sind.

Eine unmittelbare Anwendung erfährt die Theorie der Radontransformationen im Bereich der Medizin in den sechziger Jahren durch die Entwicklung der Computertomographie. 1957 konstruiert Cormack einen ersten und 1963 einen erheblich verbesserten zweiten Röntgentomographen. 1972 gelingt Hounsfield der Bau des ersten klinisch einsetzbaren Computertomographen; 1979 erhalten Cormack und Hounsfield den Nobelpreis für Medizin. Verallgemeinerungen des Integrationsprinzips über Geraden bzw. affine Hyperebenen auf die Integration über verschiedene Typen von Kurven bzw. Hyperflächen sind Gegenstand neuerer Arbeiten von Cormack und Quinto [5,6,8,18].

Schließlich seien noch Diaconis-Graham (Pac. J. Math. 118, 1985) genannt, die die Radontransformation auf endlichen Gruppen einfach als Faltung definieren und zur Untersuchung der Invertierbarkeit die bei endlichen Gruppen noch einfache Fouriertransformation zusammen mit dem Faltungssatz benutzen.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Darstellung von Radontransformationen als Faltungsoperatoren auf L^p -Räumen über speziellen Gruppen. Bewiesen werden insbesondere Aussagen zur Stetigkeit und Injektivität. In mehreren Beispielen werden daraus Eigenschaften bekannter Radontransformationen hergeleitet.

In Kapitel I wird in abstrakter Weise der Begriff der Radontransformation eingeführt, deren Eigenschaften anschließend untersucht werden.

Ausgangspunkt ist eine separable, metrisierbare, lokalkompakte, abelsche topologische Gruppe $(X, +)$ mit Haar-Maß λ_X (I.1). Für jedes Borel-Maß $\mu \in M^b(X)$ wird durch

$$R_\mu : L^p(X, \lambda_X) \longrightarrow L^p(X, \lambda_X)$$

mit

$$R_\mu f(x) := \int_X f(x+y) \mu(dy)$$

eine Radontransformation R_μ wohldefiniert. Mit der Bezeichnung μ^* für das Bildmaß von μ unter der Inversion in X erhält man $R_\mu f = f * \mu^*$. Aus dieser Darstellung als Faltungsoperator folgt unmittelbar die Stetigkeit von R_μ (I.2).

Zur Untersuchung der Injektivität auf L^1 und L^2 werden die Mittel der Fourieranalyse eingesetzt, die in I.3 kurz beschrieben werden (nach Rudin [21]). Durch den Faltungssatz für die Fouriertransformation wird das Inversionsproblem reduziert auf ein Divisionsproblem:

$$\text{Aus } R_\mu f = f * \mu^* \text{ erhält man } (R_\mu f)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{\mu}^* \quad (*).$$

In I.4 wird damit gezeigt:

R_μ ist injektiv auf $L^1(X, \lambda_X) \iff$

$$\{ \tau \in \Gamma \mid \hat{\mu}(\tau) \neq 0 \} \text{ ist dicht in } \Gamma$$

und

R_μ ist injektiv auf $L^2(X, \lambda_X) \iff$

$$\lambda_\Gamma \{ \{ \tau \in \Gamma \mid \hat{\mu}(\tau) = 0 \} \} = 0 .$$

Γ ist hierbei die Charaktergruppe zu X , λ_Γ Haar-Maß auf Γ .

Injektivität auf L^2 impliziert stets Injektivität auf L^1 . Die Umkehrung gilt i.a. nicht, wie durch ein Gegenbeispiel gezeigt wird.

Schließlich wird aus Gleichung (*) eine Umkehrformel für die Radontransformation abgeleitet. Unter bestimmten Voraussetzungen erhält man

$$f = \{ (R_\mu f)^\wedge / \hat{\mu}^* \}^\vee .$$

Dabei steht $^\vee$ für die Fourierrücktransformation.

Kapitel II behandelt ein Beispiel für die Anwendung der Theorie aus Abschnitt I.

Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ werden durch

$$K_\alpha(t, \varphi) := \{ r \cdot e^{i\varphi} \mid r > 0, |\varphi - \varphi| < \pi/(2|\alpha|), r^\alpha \cdot \cos(\alpha(\varphi - \varphi)) = t^\alpha \}$$

bei $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ sogenannte α -Kurven definiert (II.1), von denen im Anhang einige dargestellt sind.

$$\text{Durch } R_\alpha f(e^{i\varphi}, t) := \tilde{R}_\alpha f(t \cdot e^{i\varphi}) := \int_{K_\alpha(t, \varphi)} f(s) \, ds$$

für geeignete Funktionen f auf $\mathbb{R}^2$ erhält man eine Familie von Radontransformationen R_α bzw. $\tilde{R}_\alpha$ (nach Cormack [5], [6]).

Spezialfälle sind die klassische Radontransformation ($\alpha=1$) und - bis auf Normierung des integrierenden Maßes - die sphärische Radontransformation ($\alpha=-1$).

Durch die Resultate aus Kapitel I ergeben sich umfassende Aussagen für die R_α -Transformationen (II.2).

Für $\alpha \neq 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $1 \leq p < \infty$ gilt:

Bei $\varepsilon > p-2$ für $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon < p-2$ für $\alpha < 0$ sind alle Abbildungen $f \in L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\varepsilon dx)$ über f.a. α -Kurven $K_\alpha(t, \varphi)$ integrierbar und die Transformationen

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\alpha &: L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\varepsilon dx) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{\varepsilon-p} dx) \quad \text{bzw.} \\ R_\alpha &: L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\varepsilon dx) \longrightarrow L^p(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \lambda_{\mathbb{T} \otimes \mathbb{R}}(r^{\varepsilon-p+1} dr)) \end{aligned}$$

sind wohldefiniert, linear und stetig.

Die Bedingungen $\varepsilon > p-2$ ($\alpha > 0$) bzw. $\varepsilon < p-2$ ($\alpha < 0$) sind scharf. Für alle anderen Kombinationen (p, ε) gibt es eine über alle $K_\alpha(t, \varphi)$ integrierbare Abbildung $f \in L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\varepsilon dx)$, für die gilt

$$R_\alpha f \notin L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{\varepsilon-p} dx) \quad \text{und} \quad R_\alpha f \notin L^p(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \lambda_{\mathbb{T} \otimes \mathbb{R}}(r^{\varepsilon-p+1} dr)).$$

Und mit Ausnahme von $(p, \varepsilon) = (1, -1)$, also $\varepsilon = p-2$ bei $p=1$, gibt es auch stets eine Abbildung $f \in L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\varepsilon dx)$, die über keine α -Kurve integrierbar ist.

Weiter wird Injektivität der R_α -Transformationen auf L^1 und L^2 gezeigt. Für spezielle L^1 -Abbildungen läßt sich zudem eine Umkehrformel ableiten.

Schließlich erhält man einen bemerkenswerten Zusammenhang

zwischen $\tilde{R}_\alpha$ und $\tilde{R}_{-\alpha}$. Mit $I_2 f(x) := \|x\|^{-2} \cdot f(x/\|x\|^2)$ gilt

$$\tilde{R}_\alpha f(x) = \tilde{R}_{-\alpha} [I_2 f](x/\|x\|^2). \quad \text{Dieser Umstand beruht wesentlich}$$

auf der Tatsache, daß eine α -Kurve durch Inversion am Einheitskreis ($x \mapsto x/\|x\|^2$) in eine $-\alpha$ -Kurve übergeht.

Für den Beweis obiger Aussagen (II.3, II.4) wird $\mathbb{R}^2$ identifiziert mit $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ über die "Polarkoordinaten" $P: X \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $(r, z) \mapsto e^{ir} \cdot z$. Translationen in X bedeuten Drehstreckungen in $\mathbb{R}^2$, durch die man aus einer festen α -Kurve alle anderen erzeugen kann. Da α -Kurven bei positivem α unendliche Länge besitzen, werden Multiplikationen mit Gewichtsfunktionen der Form $\|x\|^\tau$ eingesetzt, um finite integrierende Maße zu erhalten, welche die Anwendung der Theorie aus Kapitel I erlauben.

Durch Wahl aller $\tau \in \mathbb{R}$, die zu einem endlichen Maß führen, ergeben sich die Aussagen für alle ϵ , für die eine Definition der R_α -Transformationen auf $L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\epsilon dx)$ möglich ist.

In Kapitel III wird das Pompeiu-Problem als Beispiel behandelt, das unmittelbar auf die in Abschnitt I gegebene Situation paßt. Es wurde deshalb in diese Arbeit aufgenommen, obwohl keine grundlegend neuen Erkenntnisse bewiesen werden.

Bei dem Problem von Pompeiu handelt es sich um folgende Fragestellung (D. Pompeiu, 1929).

$D \subset \mathbb{R}^2$ sei ein beschränktes Gebiet und Σ bezeichne die Gruppe aller Bewegungen in der Ebene. Ist dann $f = 0$ die einzige stetige Funktion auf $\mathbb{R}^2$, für die gilt

$$\iint_{\epsilon(D)} f(x, y) \, dx \, dy = 0 \quad \text{für alle } \epsilon \in \Sigma ?$$

Dieses Problem wird modifiziert zur allgemeineren Fragestellung nach der Injektivität der durch ein Maß $\mu \in M^b(\mathbb{R}^n)$ gegebenen Pompeiu-Transformation P_μ ($\mu = \lambda_2|_D$ im Ausgangsproblem).

Für eine geeignete Abbildung f auf $\mathbb{R}^n$ ist dabei

$$P_\mu f(A, x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda y + x) \mu(dy) = [f * (\mu \circ A^{-1})^*](x)$$

mit orthogonaler Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Die Situation von Kapitel I ist somit direkt gegeben ($(X, +) = (\mathbb{R}^n, +)$), so daß man unmittelbar Bedingungen an μ erhält, die Injektivität auf L^1 und L^2 garantieren.

Nun ergibt sich die Bedeutung des Pompeiu-Problems weitgehend aus der engen Verbindung zum Problem von Morera, bei dem es um Holomorphie von Abbildungen geht (siehe z.B. Brown, Schreiber, Taylor [2]). In diesem Sinne ist es wenig nützlich, nur L^p -Räume zu betrachten. Man ist vielmehr bestrebt, Bedingungen an das Wachstum der untersuchten (stetigen) Abbildungen zu vermeiden. Mit den Mitteln dieser Arbeit lassen sich noch Injektivitätsaussagen beweisen für den Raum aller stetigen Abbildungen, die (als Dichte) eine absolutreguläre temperierte Distribution definieren. Dies schließt die Abbildungen polynomialen Wachstums ein.

Die R_α -Transformationen aus Beispiel II lassen sich leicht verallgemeinern zu Radontransformation auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$. Diese werden erklärt durch Integration über α -Hyperflächen, die aus der Rotation einer α -Kurve um ihre Symmetrieachse entstehen. Will man diese Transformationen gemäß Kapitel I behandeln, so stößt man auf das Problem, keine geeignete Gruppe X zu finden. (Die Gruppe, die sich aus der "Polarkoordinatendarstellung" analog II ergibt, ist nicht kommutativ.)

Zur Umgehung dieser Schwierigkeiten wird in Abschnitt IV die Theorie aus I erweitert, indem Radontransformationen als

Mischung von Faltungen geschrieben werden. Neben der Gruppe X (wie in I) ist ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{K}(\Omega), \lambda_\Omega)$ mit finitem, nicht-negativem Maß λ_Ω gegeben.

Zu jedem $(\Omega \times \Omega) \times \mathcal{B}(X)$ - Kern $K : \Omega \times \Omega \times \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\int_{\Omega} K(\omega, \xi; X) \lambda_{\Omega}(d\omega) \leq C_K \quad (\xi \in \Omega) \quad \text{und}$$

$$\int_{\Omega} K(\omega, \xi; X) \lambda_{\Omega}(d\xi) \leq C_K \quad (\omega \in \Omega) \quad \text{für ein } C_K \geq 0,$$

wird eine Radontransformation R_K erklärt (IV.1):

$$R_K : L^P(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X) \longrightarrow L^P(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X)$$

mit

$$\begin{aligned} R_K f(\omega, x) &:= \int_{\Omega \times X} f(\xi, x+y) K(\omega, \xi; dy) \lambda_{\Omega}(d\xi) = \\ &= \int_{\Omega} \left[f(\xi, \cdot) * K^*(\omega, \xi; \cdot) \right](x) \lambda_{\Omega}(d\xi) \end{aligned}$$

$(\omega \in \Omega, x \in X)$ ist wohldefiniert, linear und stetig mit

$$\|R_K\| \leq C_K.$$

$K^*(\omega, \xi; \cdot)$ steht dabei für das Bildmaß von $K(\omega, \xi; \cdot)$ unter der Inversion in X .

Bei der Bildung von $R_K f$ werden also die Faltungsterme durch eine nachfolgende Integration "gemischt". Dies erschwert den Einsatz der Fourieranalyse zur Untersuchung der Injektivität.

Gibt es jedoch eine Orthonormalbasis B_{Ω} von $L^2(\Omega, \lambda_{\Omega})$ aus beschränkten Abbildungen $\bar{\vartheta} : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, für die gilt:

(FH) Für alle $\bar{\vartheta} \in B_{\Omega}$ gibt es ein Maß $\nu_{\bar{\vartheta}} \in M^b(X)$ mit

$$\int_{\Omega} \bar{\vartheta}(\xi) \cdot K(\omega, \xi; \cdot) \lambda_{\Omega}(d\xi) = \nu_{\bar{\vartheta}}(\cdot) \cdot \bar{\vartheta}(\omega) \quad (\omega \in \Omega),$$

so erhält man Injektivität auf L^2 , falls $\hat{v}_{\vec{Q}} \neq 0$ λ_n -f.ü.
für alle $\vec{Q} \in B_Q$ gilt (IV.2).

Wie in I wird auch in IV eine Umkehrformel bewiesen.

Im Vergleich der Methoden in I und IV weist das Verfahren der gemischten Faltung größere Flexibilität auf. Es ergibt hinsichtlich Integrierbarkeit und Stetigkeit dieselben Aussagen wie die Theorie der reinen Faltung, erfordert jedoch zum Nachweis der Injektivität wesentlich stärkere Voraussetzungen.

Als Mischungen von Faltungen werden in Kapitel V die oben bereits erwähnten R_α -Transformationen auf $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) dargestellt, die aus der Übertragung der R_α -Transformationen auf $\mathbb{R}^2$ auf den Fall höherer Dimension entstehen.

Für $(\omega, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ definiert man

$$R_\alpha f(\omega, t) := \tilde{R}_\alpha f(t \cdot \omega) := \int_{H_\alpha(\omega, t)} f(x) \lambda_{H_\alpha}(dx) .$$

Dabei ist $H_\alpha(\omega, t)$ die aus der Rotation einer α -Kurve $K_\alpha(t, \varphi)$ um $\mathbb{R} \cdot \omega$ entstandene α -Hyperfläche mit Oberflächenmaß λ_{H_α} (V.1).

R_1 ist wiederum die klassische und R_{-1} bis auf Normierung des integrierenden Maßes die sphärische Radontransformation.

Aus technischen Gründen werden nur α mit $|\alpha| \geq 1/2$ betrachtet. Gleichwohl gelten die folgenden Ergebnisse für alle $\alpha \neq 0$.

In Analogie zu II erhält man für $\epsilon \in \mathbb{R}$ und $1 \leq p < \infty$:

Bei $\epsilon > (n-1)p-n$ ($\alpha > 0$) bzw. $\epsilon < (n-1)p-n$ ($\alpha < 0$) sind alle Abbildungen $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\epsilon dx)$ über f.a. α -Hyperflächen integrierbar und die Transformationen

$$\tilde{R}_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\epsilon dx) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^{\epsilon - (n-1)p} dx) \quad \text{bzw.}$$

$$R_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\epsilon dx) \longrightarrow L^p(S^{n-1} \times \mathbb{R}^+, \lambda_{\mathbb{Q}} \otimes (r^{\epsilon - (n-1)(p-1)} dr))$$

sind wohldefiniert, linear und stetig.

Die Bedingungen an p und ϵ sind wiederum notwendig und hinreichend für obige Aussage.

R_α und $\tilde{R}_\alpha$ sind injektiv auf L^2 , eine Umkehrformel wird in V.5 bewiesen.

Analog II ergibt sich bei $I_{2n-2}f(x) := \|x\|^{-(2n-2)} \cdot f(x/\|x\|^2)$ der folgende Zusammenhang zwischen $\tilde{R}_\alpha$ und $R_{-\alpha}$:

$$\tilde{R}_\alpha f(x) = \tilde{R}_{-\alpha}(I_{2n-2}f)(x/\|x\|^2).$$

Mit diesen Aussagen werden eine Reihe bekannter Eigenschaften der klassischen bzw. sphärischen Radontransformation verallgemeinert und insbesondere für alle R_α -Transformationen bewiesen.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit der Funktransformation. Sie geht zurück auf die 1911 erschienene Dissertation [12] von P. Funk bei Hilbert. Anwendungen gibt es in der Geophysik. Erklärt wird die Funktransformation für geeignete Abbildungen f auf der Einheitssphäre S^2 in $\mathbb{R}^3$. Für $\omega \in S^2$ sei $K_\omega := \{ \xi \in S^2 \mid \langle \omega, \xi \rangle = 0 \}$ der zu ω orthogonale Großkreis mit Oberflächenmaß κ_ω , λ_S bezeichne das Oberflächenmaß auf S^2 . Dann definiert man

$$(*) \quad Ff(\omega) := \int_{K_\omega} f(\xi) \kappa_\omega(d\xi) .$$

Nach Funk gibt es eine Orthonormalbasis von $L^2(S^2, \lambda_S)$ aus Kugelfunktionen Y_{lm} ($l \in \mathbb{N}_0$, $m=0, \dots, 2l$) mit $F(Y_{lm}) = C_l \cdot Y_{lm}$ ($C_l \in \mathbb{R}$). Für die Eigenwerte gilt $C_{2l} = 0$ und $C_{2l+1} \rightarrow 0$ für $l \rightarrow \infty$. Über diesen Satz läßt sich die Funktransformation auf ganz L^2 durch stetige Fortsetzung erklären. Weitere Überlegungen geben dann Aufschluß darüber, inwieweit diese Fortsetzung durch Integration gemäß (#) beschrieben werden kann.

Hingegen erhält man aus der Darstellung als gemischter Faltungsoperator unmittelbar die Aussage, daß für beliebige $p \in [1, \infty]$ jede Abbildung aus $L^p(S^2, \lambda_S)$ über f.a. Großkreise K_ω integrierbar ist und durch (#) eine lineare, stetige Transformation $F : L^p(S^2, \lambda_S) \rightarrow L^p(S^2, \lambda_S)$ mit $\|F\| = 2\pi$ wohldefiniert wird.

Nimmt man den Satz von Funk hinzu, so zeigt man leicht, daß die Funktransformation auf den geraden Abbildungen in $L^2(S^2, \lambda_S)$ injektiv ist. Ungerade Funktionen liegen dagegen stets im Kern. Wegen $C_{2l+1} \rightarrow 0$ für $l \rightarrow \infty$ ist die aus der Einschränkung auf gerade Funktionen resultierende Umkehrtransformation offensichtlich nicht stetig.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß mit der Theorie der Darstellung von Radontransformationen als reine bzw. gemischte Faltungsoperatoren ein erfolgreiches Instrument geschaffen wurde zum Beweis vielfältiger Aussagen für sehr unterschiedliche Radontransformationen. Dies wird durch die behandelten Beispiele überzeugend zum Ausdruck gebracht.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Oppel, der diese Dissertation anregte und mich durch seine Gesprächsbereitschaft und Hinweise in hohem Maße unterstützte.

Danken möchte ich aber auch Herrn Prof. Dr. Kellerer für sein Interesse und für die freundliche Überlassung einer Assistentenstelle für ein Jahr, sowie den Herren Dr. Jäkel und Dr. Werner, die mir anschließend durch das Angebot einer flexiblen Halbtagesbeschäftigung bei der Vereinigten Krankenversicherung AG die finanzielle Absicherung meiner Arbeiten ermöglichten.

I. Radontransformationen als Faltung: R_μ -Transformationen

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Darstellung von Radontransformationen als Faltungsoperatoren.

Ausgangspunkt ist dabei die Betrachtung der Radontransformationen als Integration von Funktionen mit einer Familie von Maßen, die alle als Bildmaße eines festen integrierenden Maßes μ geschrieben werden können. Abhängig von der jeweiligen Radontransformation besteht diese Bildmaßbildung i. a. aus der Kombination von Verschiebungen, Drehungen, Streckungen oder ähnlichen Abbildungen. Findet man nun eine Gruppenstruktur, die es erlaubt, die Bildmaßbildung als Translation des Maßes μ zu interpretieren, so läßt sich die zugehörige Radontransformation als Faltungsoperator auf dieser Gruppe darstellen.

Im ersten Kapitel wird die grundlegende Theorie entwickelt. Die Radontransformation wird in abstrakter Weise definiert als Faltungsoperator auf speziellen lokalkompakten Gruppen. Die kurz angegebenen Eigenschaften dieser Gruppen und die Mittel der Fourieranalyse, die im wesentlichen aus dem Buch von Rudin [21] entnommen sind, ermöglichen den Beweis weitreichender Aussagen zur Stetigkeit und Injektivität der so definierten Radontransformationen.

Der tatsächliche Wert der erzielten Ergebnisse zeigt sich jedoch erst in den folgenden Kapiteln. Dort werden Beispiele

behandelt und die abstrakten Aussagen aus diesem Abschnitt umgesetzt in praktische Resultate für die jeweilige Radon-transformation.

1.1 Die Gruppe X , Haar-Maß und Faltung

$(X, +)$ sei eine separable, metrisierbare, lokalkompakte, abelsche topologische Gruppe.

1.1 Bemerkung

1) X ist polnisch.

2) X ist abzählbar im Unendlichen, d. h. es gibt Kompakta

$K_n \subset K_{n+1} \subset X$ ($n \in \mathbb{N}$), die gegen X aufsteigen.

3) X ist topologisch und algebraisch isomorph zu $\mathbb{R}^k \times T^l \times \mathbb{Z}^m \times E$ mit $k, l, m \in \mathbb{N}_0$, $T = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z|=1 \}$, endlicher Gruppe E und $\mathbb{Z}$ mit diskreter Topologie.

1.2 Bezeichnungen

$B(X)$ sei die von den offenen Mengen erzeugte σ -Algebra, also die Borel- σ -Algebra auf X .

λ_X sei (ein) Haar-Maß auf X , also ein nichtnegatives, reguläres, lokalfinites Maß auf $B(X)$, das translationsinvariant und verschieden von Null ist.

1.3 Bemerkung (vgl. Rudin [21])

- 1) λ_X existiert und ist eindeutig bestimmt bis auf Multiplikation mit einem Faktor größer Null.
- 2) Ist $V \subset X$ nichtleer und offen, so gilt $\lambda_X(V) > 0$.
- 3) Für alle $B \in \mathcal{B}(X)$ gilt $\lambda_X(-B) = \lambda_X(B)$.
- 4) Alle Kompakta besitzen endliches Haar-Maß.
- 5) Das Haar-Maß ist σ -finit.
- 6) Konvention zur Wahl von λ_X :

Bei $X = \mathbb{R}$ sei $\lambda_{\mathbb{R}} := (2\pi)^{-1/2} \cdot \lambda$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet.

Bei kompaktem X sei λ_X normiert gewählt, also $\lambda_X(X) = 1$.

Damit ist insbesondere $\lambda_{\mathbb{T}}$ festgelegt.

Bei diskretem X wird λ_X als Zählmaß gewählt. Damit ist insbesondere $\lambda_{\mathbb{Z}}$ festgelegt.

Bei einem Produkt $X = X_1 \times X_2$ wird λ_X als Produktmaß gewählt, also $\lambda_X := \lambda_{X_1} \otimes \lambda_{X_2}$.

1.4 Definition der Faltung

Für Borel-meßbare Abbildungen $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ und $y \in X$

mit $\int_X |f(y-x) \cdot g(x)| \lambda_X(dx) < \infty$ sei

$$f * g(y) := \int_X f(y-x) g(x) \lambda_X(dx) .$$

Für ein finites, komplexwertiges Maß μ auf $\mathcal{B}(X)$ und $y \in X$ mit $f(y-\cdot) \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ sei

$$f * \mu(y) := \mu * f(y) := \int_X f(y-x) \mu(dx) .$$

1.5 Bemerkung

- 1) Existiert $f * g(y)$, so gilt $f * g(y) = g * f(y)$,
da λ_X translations- und spiegelungsinvariant ist.
- 2) Bei $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \lambda_X)$ existiert $f * g$ λ_X -f.ü. und
 $f * g \in \mathcal{L}^1(X, \lambda_X)$ mit $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

1.6 Satz

Seien $\mu \in \mathcal{M}^b(X)$ und $p \in [1, \infty]$.

Dann gilt:

Bei $f \in \mathcal{L}^p(X, \lambda_X)$ existiert $\mu * f$ λ_X -f.ü. und die induzierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} *_{\mu} : L^p(X, \lambda_X) & \longrightarrow & L^p(X, \lambda_X) \\ f & \longmapsto & \mu * f \end{array}$$

ist wohldefiniert, linear und stetig mit $\|*_{\mu}\| \leq \|\mu\|$.

Der Beweis dieses eigentlich bekannten Satzes ist aus Gründen der Vollständigkeit im Anhang aufgeführt.

1.2 Die Radontransformation R_μ auf $L^P(X, \lambda_X)$

2.1 Definition

Seien $T_x : X \longrightarrow X$, $y \longmapsto T_x(y) := y + x$ die Translation um $x \in X$

und $j : X \longrightarrow X$, $x \longmapsto -x$ die Inversion in X .

Weiter seien für $\mu \in M^b(X)$

$$\nu_x := \mu \circ T_x^{-1} \in M^b(X) \quad (x \in X)$$

und $\mu^* := \mu \circ j^{-1} \in M^b(X)$.

2.2 Definition der Radontransformationen R_μ

Für $\mu \in M^b(X)$ und $p \in [1, \infty]$ sei

$$\begin{aligned} pR_\mu : L^p(X, \lambda_X) &\longrightarrow L^p(X, \lambda_X) \\ f &\longmapsto pR_\mu f \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} pR_\mu f(y) &:= \int_X f(x) \mu_y(dx) = \\ &= \int_X f(y+x) \mu(dx) = \int_X f(y-x) \mu^*(dx) = \\ &= f * \mu^*(y). \end{aligned}$$

pR_μ heißt R_μ -Transformation auf $L^p(X, \lambda_X)$.

Zur Abkürzung wird statt ${}_pR_\mu$ auch R_μ oder nur R geschrieben.

2.3 Bemerkung

Nach Satz 1.6 ist die soeben definierte Radontransformation ${}_pR_\mu$ wohldefiniert, linear und stetig. Für die Operatornorm gilt

$$\|{}_pR_\mu\| \leq \|\mu\|.$$

2.4 Bemerkung

Die Bezeichnung μ^* für $\mu \circ j^{-1}$ ist motiviert durch den folgenden Zusammenhang:

Ist μ ein reellwertiges Borel-Maß, so gilt

$$\int_X [{}_2R_\mu f](x) \cdot \overline{g(x)} \lambda_X(dx) = \int_X f(x) \cdot \overline{[{}_2R_{(\mu^*)} g](x)} \lambda_X(dx)$$

für alle $f, g \in L^2(X, \lambda_X)$.

Die zu ${}_2R_\mu$ adjungierte Abbildung $[{}_2R_\mu]^*$ ist also gerade gegeben durch die Radontransformation ${}_2R_{(\mu^*)}$.

Beweis

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von oben erhält man mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_X [{}_2R_\mu f](x) \cdot \overline{g(x)} \lambda_X(dx) &= \int_X \int_X f(x+y) \cdot \overline{g(x)} \mu(dy) \lambda_X(dx) = \\ &= \int_X \int_X f(x+y) \cdot \overline{g(x)} \lambda_X(dx) \mu(dy) = \int_X \int_X f(z) \cdot \overline{g(z-y)} \lambda_X(dz) \mu(dy) = \end{aligned}$$

$$= \int_X f(z) \int_X \overline{g(z-y)} \mu(dy) \lambda_X(dz) = \int_X f(z) \int_X \overline{g(z+y)} \mu^*(dy) \lambda_X(dz) =$$

$$= \int_X f(z) \cdot \overline{[J_{(\mu^*)}^R g](z)} \lambda_X(dz) .$$

1.3 Die duale Gruppe Γ und die Fouriertransformation

Um Aussagen zur Injektivität der Radontransformation zu erhalten, ist es sinnvoll, die Mittel der Fourieranalyse einzusetzen. Als wesentliches Instrument wird der Faltungssatz benutzt, durch den das Problem der Umkehrung der Radontransformation auf ein Divisionsproblem reduziert wird. Zunächst jedoch werden die Grundlagen zur Definition der Fouriertransformation auf der Gruppe X bereitgestellt.

3.1 Definition und Bemerkung

$\Gamma := \Gamma(X) := \{ \chi: (X, +) \longrightarrow (T, \cdot) \mid \chi \text{ Gruppenhomomorphismus} \}$

ist versehen mit punktweiser Addition $+$ eine abelsche Gruppe und wird Charaktergruppe zu X genannt.

Für $\chi(x)$ schreibt man gewöhnlich $\langle x, \chi \rangle$ ($x \in X, \chi \in \Gamma$).

3.2 Γ als topologische Gruppe

$B := \{ N(K, \epsilon) \mid \epsilon > 0, K \text{ kompakt in } X \}$

mit $N(K, \epsilon) := \{ \chi \in \Gamma \mid |\langle x, \chi \rangle - 1| < \epsilon \quad \forall x \in K \}$

ist eine Filterbasis auf Γ .

Und zu B gibt es genau eine Topologie $G(\Gamma)$ auf Γ , die $(\Gamma, +, G(\Gamma))$ zu einer topologischen Gruppe macht und für die B eine Null-Umgebungsbasis in Γ ist.

$(\Gamma, +, G(\Gamma))$ heißt die zu $(X, +)$ duale Gruppe.

3.3 Eigenschaften der dualen Gruppe

1) $(\Gamma, +, G(\Gamma))$ ist eine separable, metrisierbare, lokalkompakte, abelsche Gruppe.

2) $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times \Gamma \longrightarrow T$ ist stetig.

3) Es gilt das Dualitätstheorem von Pontryagin:

$(X, +)$ ist isomorph zu seinem Bidual $(\Gamma(\Gamma(X)), +)$

vermöge der Abbildung $x \longmapsto (\langle x, \cdot \rangle : \Gamma(X) \longrightarrow T)$

4) Für $X = \prod_{i=1}^n X_i$ und $G = \prod_{i=1}^n \Gamma(X_i)$ gilt:

G ist isomorph zu $\Gamma(X)$ vermöge der Abbildung

$$G \longrightarrow X, (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \prod_{i=1}^n \langle x_i, \gamma_i \rangle$$

3.4 Beispiele dualer Gruppen

X	R	Z	T
$\Gamma(X)$	R	T	Z
$\langle x, \gamma \rangle$	$e^{ix\gamma}$	γ^x	x^γ

3.5 Definition der Fouriertransformation auf X

Für eine Abbildung $f \in \mathcal{L}^1(X, \lambda_X)$ bzw. $L^1(X, \lambda_X)$ heißt

$$\hat{f} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma \longmapsto \hat{f}(\gamma) := \int_X \langle -x, \gamma \rangle f(x) \lambda_X(dx)$$

die Fouriertransformierte von f .

Entsprechend wird für ein komplexwertiges Borel-Maß

$\mu \in M^b(X)$ die Fouriertransformierte definiert zu

$$\hat{\mu} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma \longmapsto \hat{\mu}(\gamma) := \int_X \langle -x, \gamma \rangle \mu(dx) \quad .$$

3.6 Bemerkung

Die Fouriertransformation besitzt eine Reihe besonderer Eigenschaften, von denen hier einige zitiert werden.

Setze $\Lambda(\Gamma) := \{ \hat{f} \mid f \in \mathcal{L}^1(X, \lambda_X) \}$. Dann gilt:

- 1) $\Lambda(\Gamma)$ ist eine punktetrennende, selbstadjungierte Unterálgebra von $C_0(\Gamma, \mathbb{C})$. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist $\Lambda(\Gamma)$ also dicht in $(C_0(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$.
- 2) $\Lambda(\Gamma) = \{ f * g \mid f, g \in L^2(\Gamma, \lambda_\Gamma) \}$.
- 3) Die Topologie $G(\Gamma)$ auf Γ ist gerade die Initialtopologie bezüglich $\Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{C}^\Gamma$.
- 4) Die Fouriertransformation $\hat{\cdot} : L^1(X, \lambda_X) \longrightarrow (C_0(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ ist linear und stetig mit $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
- 5) Für $f, g \in L^1(X, \lambda_X)$ gilt der Faltungssatz:

$$(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g} \quad .$$
- 6) Besitzt $\mu \in M^b(X)$ die λ_X -Dichte $f \in \mathcal{L}^1(X, \lambda_X)$, so gilt $\hat{f} = \hat{\mu}$.

7) Bei $\mu \in M^b(X)$ ist die Fouriertransformierte $\hat{\mu}$ gleichmäßig stetig und beschränkt durch $\|\mu\|$.

8) Die Fouriertransformation ist injektiv.

Zum Beweis dieser Eigenschaften siehe Rudin [21].

Dort findet man auch die folgenden Sätze.

3.7 Satz von Bochner

Eine stetige Abbildung $\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann nichtnegativdefinit, wenn sie die Fouriertransformierte eines Maßes $\mu \in M^b_+(X)$ ist.

3.8 Inversionsformel

Setze $B(X) := \{ f: X \longrightarrow \mathbb{C} \mid \exists \mu \in M^b(\Gamma) : f = \int_{\Gamma} \langle \cdot, \tau \rangle \mu(d\tau) \}$

Dann gilt für alle $f \in \mathcal{L}^1(X, \lambda_X) \cap B(X) \subset C^b(X)$:

$$\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\Gamma, \lambda_{\Gamma}) .$$

Und das Haar-Maß λ_{Γ} kann so normiert werden, daß

$$f(x) = \int_{\Gamma} \langle x, \tau \rangle \hat{f}(\tau) \lambda_{\Gamma}(d\tau) \quad (x \in X)$$

für alle $f \in \mathcal{L}^1(X, \lambda_X) \cap B(X)$ gilt.

Konvention

Das Haar-Maß λ_{Γ} sei stets so gewählt, daß die Inversionsformel gültig ist. In den Spezialfällen aus 1.3 6) stimmt diese Festlegung überein mit der alten Konvention.

3.9 Satz von Plancherel

Die Fouriertransformation ist als Abbildung von

$$[L^1(X, \lambda_X) \cap L^2(X, \lambda_X) , \| \cdot \|_2] \text{ nach } L^2(\Gamma, \lambda_\Gamma) \text{ eine}$$

Isometrie auf einen dichten Unterraum.

Man erhält eine eindeutige stetige Fortsetzung zu einem Hilbertraumisomorphismus

$$\hat{} : L^2(X, \lambda_X) \longrightarrow L^2(\Gamma, \lambda_\Gamma) ,$$

der Fourier-Plancherel-Transformation genannt wird.

Analog zum Faltungssatz für L^1 -Abbildungen (3.6 5) erhält man

3.10 Lemma (Faltungssatz für ${}_p R_\mu$)

Für $p=1$ und $p=2$, $\mu \in M^b(X)$ sowie $f \in L^p(X, \lambda_X)$ gilt:

$$[{}_p R_\mu f]^\wedge = [f * \mu^*]^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{\mu}^* .$$

I.4 Injektivität der Radontransformation auf L^1 und L^2

Mit den Hilfsmitteln der Fourieranalyse aus Abschnitt I.3 werden nun zwei Sätze zur Injektivität der Radontransformation bewiesen.

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen an die Fouriertransformierte des integrierenden Maßes μ angegeben, die Injektivität der Radontransformationen ${}_1R_\mu$ auf L^1 bzw. ${}_2R_\mu$ auf L^2 garantieren.

4.1 Satz

Für ein komplexwertiges Borel-Maß $\mu \in \mathcal{M}^b(X)$ gilt:

$\{ \tau \in \Gamma \mid \hat{\mu}(\tau) \neq 0 \}$ ist dicht in Γ $\iff$

$${}_1R_\mu : L^1(X, \lambda_X) \longrightarrow L^1(X, \lambda_X) \text{ injektiv.}$$

Beweis

" $\implies$ "

Ist $f \in L^1(X, \lambda_X)$ mit ${}_1R_\mu f = 0$, also $0 = f * \mu^*$ in L^1 ,

so folgt $0 = \hat{f} \cdot \hat{\mu}^*$ punktweise.

Wegen $\hat{\mu}^* = [\mu \circ j^{-1}]^\wedge = \hat{\mu}(-\cdot)$ und der Voraussetzung an μ ist

auch $\{ \hat{\mu}^* \neq 0 \}$ dicht in Γ .

Also ist $\hat{f} = 0$ auf einer dichten Teilmenge von Γ .

Da $\hat{f}$ stetig ist, folgt $\hat{f} = 0$ punktweise und somit schließlich $f = 0$ in $L^1(X, \lambda_X)$.

" $\Leftarrow$ "

Annahme: $\{\hat{\mu}^* \neq 0\}$ ist nicht dicht in Γ .

Dann gibt es $\gamma_0 \in \Gamma$ und eine Umgebung U von γ_0 mit $\hat{\mu}^*(\gamma) = 0$ für alle $\gamma \in U$.

Weiter existieren in Γ Umgebungen U_1 von γ_0 und U_2 von 0 mit $U_1 + U_2 \subset U$ und $\lambda_\Gamma(U_1), \lambda_\Gamma(U_2) < \infty$.

Also gilt $0 \neq \chi_{U_1}, \chi_{U_2} \in L^2(\Gamma, \lambda_\Gamma)$, so daß die Faltung $\chi_{U_1} * \chi_{U_2}$ nach Bemerkung 3.6 2) ein Element von $\Lambda(\Gamma)$ ist.

Somit gibt es eine Abbildung $f \in L^1(X, \lambda_X)$ mit $\hat{f} = \chi_{U_1} * \chi_{U_2}$.

Und man erhält $\{\hat{f} \neq 0\} \subset U_1 + U_2 \subset U \subset \{\hat{\mu}^* = 0\}$,

so daß gilt $[f * \mu^*]^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{\mu}^* = 0$.

Die Abbildung f ist daher ein nichttriviales Element im Kern von ${}_i R_\mu$. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von ${}_i R_\mu$.

4.2 Satz

Für $\mu \in M^b(X)$ gilt:

$$\lambda_{\Gamma} \{ \{ \varphi \in \Gamma \mid \hat{\mu}(\varphi) = 0 \} \} = 0 \iff$$

$${}_2R_{\mu} : L^2(X, \lambda_X) \longrightarrow L^2(X, \lambda_X) \text{ injektiv.}$$

Beweis

" $\implies$ "

Nach Voraussetzung ist $\lambda_{\Gamma} \{ \{ \hat{\mu}^* = 0 \} \} = \lambda_{\Gamma} \{ - \{ \hat{\mu} = 0 \} \} = 0$
(vgl. 1.3 3) .

Wie im Beweis zu Satz 4.1 folgt also für jede Abbildung $f \in L^2(X, \lambda_X)$ mit ${}_2R_{\mu} f = 0$ über den Faltungssatz, daß $\hat{f} = 0$ in L^2 gilt. Die Injektivität der Fourier-Plancherel-Transformation ergibt dann $f = 0$ in L^2 .

" $\impliedby$ "

Annahme: $\lambda_{\Gamma} \{ \{ \hat{\mu}^* = 0 \} \} > 0$.

Dann gibt es $0 \neq g \in L^2(\Gamma, \lambda_{\Gamma})$ mit $\{ \hat{\mu}^* \neq 0 \} \subset \{ g = 0 \}$.

Und die Fourier-Plancherel-Rücktransformierte von g ist ein nichttriviales Element des Kerns von ${}_2R_{\mu}$.

Also ist ${}_2R_{\mu}$ nicht injektiv. Die Annahme führt somit zu einem Widerspruch.

4.3 Bemerkung

Ist ${}_2R_\mu$ injektiv, so ist auch ${}_4R_\mu$ injektiv.

Denn erfüllt $\mu \in M^b(X)$ die Voraussetzung in Satz 4.2 ,
so genügt μ auch der Voraussetzung von Satz 4.1 , da nach
1.3 2) das Komplement einer Nullmenge stets dicht ist.

Die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Es gibt z.B. ein Maß $\mu \in M^b(\mathbb{R})$, für das die Transformation
 ${}_4R_\mu$ injektiv ist, nicht aber ${}_2R_\mu$:

$\{ q_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ sei eine Abzählung von $\mathbb{Q}$.

Mit $g_0(t) := \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{1-t^2}\right] & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1 \end{cases}$ erhält

man durch $g_k(t) := 2^{-k^2} \cdot g_0(2^k(t-q_k))$ ($t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$)

eine Folge von C^∞ -Abbildungen mit $\|g_k^{(j)}\|_\infty = 2^{-k(k-j)} \cdot \|g_0^{(j)}\|_\infty$

($j \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$) .

Schließlich definiert $\hat{f}(t) := e^{-t^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)$ ($t \in \mathbb{R}$)

eine Schwartz-Funktion, d.h. ein Element von $S(\mathbb{R})$, und

$\{ \hat{f} \neq 0 \} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}]q_k - 2^{-k}, q_k + 2^{-k}[$ ist dicht in $\mathbb{R}$, besitzt

aber endliches Maß, so daß $\{ \hat{f} = 0 \}$ keine Nullmenge darstellt.

Die Fourier-Rücktransformierte $f \in S(\mathbb{R})$ ist dann die ge-
wünschte Dichte von μ .

4.4 Umkehrformel für ${}_1R_\mu$

Sei $\mu \in M^b(X)$ mit $\{ \tau \in \Gamma \mid \hat{\mu}(\tau) \neq 0 \}$ dicht in Γ .

Ferner sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \lambda_X) \cap C^b(X)$.

Dann definiert man:

1) f erfüllt die Bedingung (B), falls es eine Konstante C gibt mit

$$\left| \sum_{i=1}^m a_i \cdot f(x_i) \right| \leq C \cdot \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^m a_i \cdot \langle x_i, \tau \rangle \right| \mid \tau \in \Gamma \right\}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$ und $x_i \in X$ ($i=1, \dots, m$).

2) f erfüllt die Bedingung (S), falls es eine Konstante M gibt mit

$$\left| \int_X h(x) f(x) \lambda_X(dx) \right| \leq M \cdot \|h\|_\infty$$

für alle $h \in L^1(X, \lambda_X)$.

Nun gilt:

Erfüllt f die Bedingung (B) oder (S), so folgt $f \in B(X)$ und aus der Inversionsformel 3.8 erhält man

$$f(x) = \int_{\Gamma} \langle x, \tau \rangle \frac{({}_1R_\mu f)^\wedge(\tau)}{\hat{\mu}(-\tau)} \lambda_\Gamma(d\tau) \quad \text{für alle } x \in X$$

Beweis

Nach Eberlein [10] gilt $f \in B(X)$, falls f die Bedingung (B) oder (S) erfüllt.

Aus der Inversionsformel 3.8 folgt dann

$$f(x) = \int_{\Gamma} \langle x, \gamma \rangle \hat{f}(\gamma) \lambda_{\Gamma}(d\gamma) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Nach 3.10 gilt aber $[{}_1 R_{\mu} f]^{\wedge} = \hat{f} \cdot \hat{\mu}^*$, so daß

$$\hat{f} \text{ gegeben ist durch } \frac{[{}_1 R_{\mu} f]^{\wedge}}{\hat{\mu}^*} = \frac{[{}_1 R_{\mu} f]^{\wedge}}{\hat{\mu}(-.)}.$$

Damit erhält man die Behauptung.

4.5 Bemerkung

Nach Eberlein [10] sind die Bedingungen (B) und (S) aus 4.4 für eine Abbildung $f \in \mathcal{L}^1(X, \lambda_X) \cap C^b(X)$ äquivalent dazu, daß $f \in B(X)$ gilt.

Und in diesem Fall sind die kleinsten Konstanten C und M in (B) bzw. (S) gegeben durch $\|\hat{f}\|_1$.

II. Beispiel: Eine Familie von Radontransformationen auf $\mathbb{R}^2$,

Integration über α -Kurven

Die Radontransformationen in diesem Beispiel gehen zurück auf A. M. Cormack (siehe [5] und [6]). Er überträgt das Prinzip der Integration über Geraden bzw. Kreise bei der klassischen bzw. sphärischen Radontransformation auf eine Schar anderer Kurventypen, die sogenannten α -Kurven ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Zu jedem Typ einer α -Kurve wird eine R_α -Transformation definiert, die einer Abbildung die Integrale über alle α -Kurven im $\mathbb{R}^2$ zuordnet. Man erhält die klassische und sphärische Radontransformation als Spezialfälle der R_α -Transformationen für $\alpha = 1$ bzw. $\alpha = -1$.

Um die Ergebnisse von Kapitel I auf die R_α -Transformationen anzuwenden, betrachtet man den $\mathbb{R}^2$ als Gruppe in Polarkoordinatendarstellung. Dadurch sind die Drehstreckungen, durch die man aus einer festen α -Kurve alle anderen erhält, gerade Translationen. Da die α -Kurven für positives α unendliche Länge besitzen, das integrierende Maß somit nicht finit ist, werden Multiplikationen mit Gewichtsfunktionen eingesetzt, die die Form $\|\cdot\|^\tau$ besitzen und es ermöglichen, durch Variation des Parameters τ Ergebnisse für eine Vielzahl von Räumen der Gestalt $L^p(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|^\epsilon dx)$ ($1 \leq p < \infty$, $\epsilon \in \mathbb{R}$) zu erhalten.

In diesem Beispiel gelte stets $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

II.1 Die α -Kurven

1.1 Definition

Für $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ heißt

$$K_{\alpha}(t, \varphi) := \{ r \cdot e^{i\varphi} \mid r > 0, |\varphi - \varphi| < \pi/(2|\alpha|), r^{\alpha} \cdot \cos(\alpha(\varphi - \varphi)) = t^{\alpha} \}$$

die α -Kurve zum (Auf)punkt $t \cdot e^{i\varphi}$.

Ist $\alpha < 0$, so wird $K_{\alpha}(t, \varphi)$ auch β -Kurve genannt (mit $\beta = -\alpha$).

1.2 Eigenschaften der α -Kurven

1) Die α -Kurve $K_{\alpha}(t, \varphi)$ ist achsensymmetrisch zu $\mathbb{R} \cdot e^{i\varphi}$.

2) Bei $\alpha > 0$ strebt $K_{\alpha}(t, \varphi)$ gegen ∞ für $|\varphi - \varphi| \rightarrow \pi/(2\alpha)$,
bei $\alpha < 0$ dagegen gegen 0 für $|\varphi - \varphi| \rightarrow \pi/(2|\alpha|)$.

3) Bei $0 < |\alpha| < \frac{1}{2}$ schneidet $K_{\alpha}(t, \varphi)$ sich selbst
mindestens einmal, bei $|\alpha| \geq \frac{1}{2}$ nicht.

4) Spezialfälle von α -Kurven:

$\alpha = -2$: Lemniskatenast,

$\alpha = -1$: $K_{-1}(t, \varphi) = S(t \cdot e^{i\varphi})$ Kreis durch 0 und $t \cdot e^{i\varphi}$,

$\alpha = -\frac{1}{2}$: Kardioiden,

$\alpha = \frac{1}{2}$: Parabel,

$\alpha = 1$: $K_1(t, \varphi) = H(e^{i\varphi}, t)$ Gerade mit Aufpunkt $t \cdot e^{i\varphi}$,

$\alpha = 2$: Hyperbelast.

Eine Darstellung spezieller α -Kurven findet man im Anhang.

5) Unter der Inversion $j : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|^2} \quad \text{gilt:}$$

$$\begin{aligned} j[K_\alpha(t, \varphi)] &= \left\{ \frac{1}{r} e^{i\varphi} \mid r > 0, \quad |\varphi - \varphi| < \pi / (2|\alpha|), \quad r^\alpha \cos(\alpha(\varphi - \varphi)) = t^\alpha \right\} = \\ &= \left\{ s \cdot e^{i\varphi} \mid s > 0, \quad |\varphi - \varphi| < \pi / (2|\alpha|), \quad s^{-\alpha} \cos(-\alpha(\varphi - \varphi)) = (1/t)^{-\alpha} \right\} = \\ &= K_{-\alpha}(1/t, \varphi) . \end{aligned}$$

Eine α -Kurve geht also durch Inversion am Einheitskreis über in eine $(-\alpha)$ -Kurve.

6) Für festes $x = s \cdot e^{i\psi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (mit $s > 0$ und $\psi \in \mathbb{R}$) gilt:

$$\begin{aligned} &\left\{ t \cdot e^{i\varphi} \mid (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad x \in K_\alpha(t, \varphi) \right\} = \\ &= \left\{ t \cdot e^{i\varphi} \mid t > 0, \quad |\psi - \varphi| < \pi / (2|\alpha|), \quad s^\alpha \cos(\alpha(\psi - \varphi)) = t^\alpha \right\} = \\ &= \left\{ t \cdot e^{i\varphi} \mid t > 0, \quad |\varphi - \psi| < \pi / (2|-\alpha|), \quad t^{-\alpha} \cos(-\alpha(\varphi - \psi)) = s^{-\alpha} \right\} = \\ &= K_{-\alpha}(s, \psi) . \end{aligned}$$

Die Menge der Aufpunkte aller α -Kurven durch den festen Punkt x ist also gerade die $(-\alpha)$ -Kurve zum Aufpunkt x .

1.3 Die Integration über α -Kurven

Sei $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Zur Berechnung des Kurvenintegrals längs $K_\alpha(t, \varphi)$ dient die folgende Parametrisierung:

$$\Gamma : \left] -\frac{\pi}{2|\alpha|}, \frac{\pi}{2|\alpha|} \right[\longrightarrow K_{\alpha}(t, \varphi)$$

$$s \longmapsto \left(\Gamma_1(s), \Gamma_2(s) \right) := \frac{t}{\cos^{1/\alpha}(\alpha s)} \left(\cos(s+\varphi), \sin(s+\varphi) \right)$$

Man erhält

$$\left[\Gamma_1'^2(s) + \Gamma_2'^2(s) \right]^{1/2} = \frac{t}{\cos^{1+1/\alpha}(\alpha s)} \quad \text{für } |s| < \frac{\pi}{2|\alpha|}.$$

Bei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ gilt also für das Kurvenintegral von f über $K_{\alpha}(t, \varphi)$:

$$\int_{K_{\alpha}(t, \varphi)} f(s) \, ds = \int_{-\frac{\pi}{2|\alpha|}}^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} f(\Gamma(s)) \frac{t}{\cos^{1+1/\alpha}(\alpha s)} \, ds.$$

II.2 Die Radontransformationen R_α und ihre Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden die R_α -Transformationen definiert und die Ergebnisse aufgeführt, die man mit der in Kapitel I entwickelten Theorie für diese Transformationen erzielen kann.

2.1 Definition

Sei $x = t \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (mit $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$).

Für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ seien - sofern existent -

$R_\alpha f(e^{i\varphi}, t) := \tilde{R}_\alpha f(t \cdot e^{i\varphi})$ definiert als das Kurvenintegral von f über $K_\alpha(t, \varphi)$, d. h.

$$\begin{aligned} R_\alpha f(e^{i\varphi}, t) &:= \tilde{R}_\alpha f(t \cdot e^{i\varphi}) := \int_{K_\alpha(t, \varphi)} f(s) \, ds = \\ &= t \int_{-\frac{\pi}{2|\alpha|}}^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} f\left(\frac{t}{\cos^{1/\alpha}(\alpha s)} [\cos(s+\varphi), \sin(s+\varphi)]\right) \frac{1}{\cos^{1+1/\alpha}(\alpha s)} \, ds. \end{aligned}$$

Existiert $R_\alpha f(\omega, t)$ für f.a. $(\omega, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+$, d.h.

$\tilde{R}_\alpha f(x)$ für f.a. $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so heißen $R_\alpha f$ bzw. $\tilde{R}_\alpha f$

die α -Radontransformierte von f .

Die Familie der R_α -Transformationen umfaßt die klassische und die sphärische Radontransformation. Diese Spezialfälle sind Gegenstand der folgenden Bemerkung.

2.2 Bemerkung

1) Für $\alpha = 1$ erhält man als R_α -Transformation gerade die klassische Radontransformation:

Für $\omega \in T$ und $t > 0$ sei $\lambda_H(\omega, t)$ das auf der Geraden $H(\omega, t) := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, \omega \rangle = t \}$ konzentrierte eindimensionale Lebesgue-Maß.

Die klassische Radontransformierte einer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ an der Stelle (ω, t) ist dann ja gegeben - sofern existent - durch

$$Rf(\omega, t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \lambda_H(\omega, t)(dx) .$$

Wegen $H(\omega, t) = K_1(t, \arg(\omega))$ (bei $\omega = e^{i \cdot \arg \omega}$) gilt offensichtlich $Rf(\omega, t) = R_1 f(\omega, t)$.

2) Im Fall $\alpha = -1$ ist die R_α -Transformation - bis auf Normierung des integrierenden Maßes - die sphärische Radontransformation:

Für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei Ω_x die normierte Gleichverteilung auf dem Kreis $S(x) := \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y - x/2\| = \|x\|/2 \}$.

Die sphärische Radontransformierte einer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ an der Stelle x ist dann - sofern existent - gegeben durch

$$SMf(x) := \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \Omega_x(dy) .$$

Die Definition der sphärischen Radontransformation geht zurück auf Cormack. Zur weiteren Information siehe Cormack [7] und für den Fall höherer Dimension Cormack, Quinto [8].

Da $S(x) \setminus \{0\} = K_{-1}(\|x\|, \arg(x))$ (bei $x = \|x\| \cdot e^{i \cdot \arg(x)}$)
und da $K_{-1}(\|x\|, \arg(x))$ die Länge $\pi\|x\|$ besitzt, gilt

$$SMf(x) = \frac{1}{\pi\|x\|} \cdot \tilde{R}_{-1}f(x) .$$

Nach der Einführung der R_α -Transformationen folgen nun die Resultate aus der Behandlung als Faltungsoperator gemäß Kapitel I.

2.3 Ergebnisse

Seien $p \in [1, \infty[$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Teil I : Integrierbarkeit

(EI.1) Bei $\varepsilon < p-2$ oder $\varepsilon = p-2 > -1$ für $\alpha > 0$
bzw. $\varepsilon > p-2$ oder $\varepsilon = p-2 > -1$ für $\alpha < 0$
gibt es eine Abbildung $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\varepsilon dx)$, die
über keine α -Kurve $K_\alpha(t, \varphi)$ ($t > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$)
integrierbar ist.

(EI.2) Bei $\varepsilon > p-2$ für $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon < p-2$ für $\alpha < 0$
gilt für jede Abbildung $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\varepsilon dx)$:

Für f.a. $(\omega, r) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+$ existiert

$$\tilde{R}_\alpha f(r\omega) = R_\alpha f(\omega, r) = \int_{K_\alpha(r, \arg \omega)} f(s) \, ds.$$

Teil II : Definitionsbereich, Bildraum und Stetigkeit

(EII.1) Bei $\epsilon > p-2$ für $\alpha > 0$ bzw. $\epsilon < p-2$ für $\alpha < 0$ wie in (EI.2) sind die Abbildungen

$$\tilde{R}_\alpha : L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\epsilon dx) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{\epsilon-p} dx) \quad \text{bzw.}$$

$$R_\alpha : L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\epsilon dx) \longrightarrow L^p(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \lambda_{\mathbb{T} \otimes \mathbb{R}}(r^{\epsilon-p+1} dr))$$

wohldefiniert, linear und stetig.

(EII.2) Bei $\epsilon \leq p-2$ für $\alpha > 0$ bzw. $\epsilon \geq p-2$ für $\alpha < 0$ gibt es eine über alle $K_\alpha(t, \varphi)$ integrierbare

Abbildung $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\epsilon dx)$ mit

$$\tilde{R}_\alpha f \notin L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{\epsilon-p} dx) \quad \text{und}$$

$$R_\alpha f \notin L^p(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \lambda_{\mathbb{T} \otimes \mathbb{R}}(r^{\epsilon-p+1} dr)).$$

Teil III : Injektivität

(EIII) Für $p = 1$ und $p = 2$ sind die Radontransformationen

$\tilde{R}_\alpha$ und R_α gemäß (EII.1) zusätzlich injektiv.

Eine Umkehrformel für spezielle Abbildungen f aus $L^1(\mathbb{R}^2, \|x\|^\epsilon dx)$ wird in Abschnitt II.4 beschrieben.

Teil IV : Der Zusammenhang zwischen R_α und $R_{-\alpha}$

Für $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ und $\tau \in \mathbb{R}$ sei

$$I_\tau f(x) := \begin{cases} \|x\|^{-\tau} \cdot f(x/\|x\|^2) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt:

(EIV.1) Für $x \neq 0$ ist $I_\tau(I_\tau f)(x) = f(x)$ und

für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt

$$I_\tau : L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\varepsilon dx) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{\tau p - 4 - \varepsilon} dx)$$

ist ein Normisomorphismus.

(EIV.2) Ist $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ meßbar, so gilt für alle

$x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\alpha f(x) &= \int_{K_\alpha(\|x\|, \arg x)} f(s) \, ds = \int_{K_{-\alpha}(1/\|x\|, \arg x)} I_2 f(s) \, ds = \\ &= I_0[\tilde{R}_{-\alpha}(I_2 f)](x) = \tilde{R}_{-\alpha}\{I_2 f\}(x/\|x\|^2), \end{aligned}$$

sofern eines der beiden Integrale existiert.

Im Hinblick auf (EI.2) und (EII.1) beachte man, daß

gilt:

$$\varepsilon \gtrless p-2 \iff (2p-4-\varepsilon) \gtrless p-2$$

II.3 Darstellung der Radontransformationen R_α als Faltungsoperatoren

3.1 Definition

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1) Für $\gamma \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ sei

$$T_\gamma f(x) := \begin{cases} \|x\|^{-\gamma} f(x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

2) Es gelte folgende Konvention:

Ist $\alpha > 0$, so sei stets $\gamma \in]-\infty, -1[$,

bei $\alpha < 0$ sei stets $\gamma \in]-1, \infty[$.

3) Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ sei

$$\lambda_\alpha(B) := \int_{-\frac{\pi}{2|\alpha|}}^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} \chi_B[\cos^{-1/\alpha}(\alpha t) \cdot (\cos(t), \sin(t))] \cos^{-1-1/\alpha}(\alpha t) dt,$$

d. h. λ_α ist das Bogenmaß auf $K_\alpha(1,0)$.

4) Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ sei weiter

$$\lambda_{\alpha\gamma}(B) := \int_B \|x\|^\gamma \lambda_\alpha(dx).$$

5) Für $x = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ sei

$$\tau_x: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad y \longmapsto \tau_x(y) := r \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot y.$$

τ_x beschreibt also eine Drehung um φ und eine anschließende Streckung um den Faktor r .

3.2 Bemerkung

Unter Beachtung der Konvention 3.1 2) von oben gilt

$$\lambda_{\alpha\vartheta} \in M^{b+}(\mathbb{R}^2) \quad .$$

Bei $x = t \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist weiter $K_\alpha(t, \varphi) = \tau_x(K_\alpha(1, 0))$

und für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ erhält man, sofern

$R_\alpha f(e^{i\varphi}, t)$ oder das rechte Integral existieren:

$$\tilde{R}_\alpha f(x) = R_\alpha f(e^{i\varphi}, t) = \|x\|^{\vartheta+1} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} [T_\vartheta f](\tau_x(y)) \lambda_{\alpha\vartheta}(dy) \quad .$$

Beweis

Offensichtlich ist $\lambda_{\alpha\vartheta}$ ein positives Maß auf $\mathbb{R}^2$ und

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\vartheta}(\mathbb{R}^2) &= \int_{\mathbb{R}^2} \|x\|^\vartheta \lambda_\alpha(dx) = \int_{-\frac{\pi}{2|\alpha|}}^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} \|\Gamma(s)\|^\vartheta \cos^{-1-1/\alpha}(\alpha s) \, ds = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2|\alpha|}}^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} \cos^{-\vartheta/\alpha}(\alpha s) \cdot \cos^{-1-1/\alpha}(\alpha s) \, ds = \\ &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} \cos^{-1-(\vartheta+1)/\alpha}(|\alpha|s) \, ds = \frac{2}{|\alpha|} \cdot \int_0^1 \frac{r^{-1-(\vartheta+1)/\alpha}}{[1-r^2]^{1/2}} \, dr \leq \end{aligned}$$

$$\leq C \cdot \int_0^{1/2} r^{-1-(\gamma+1)/\alpha} dr + C' \cdot \int_{1/2}^1 (1-r^2)^{-\frac{\gamma}{2}} dr < \infty,$$

da $-(\gamma+1)/\alpha > 0$ nach 3.1 2).

Also gilt $\lambda_{\alpha\gamma} \in M^{b+}(\mathbb{R}^2)$.

$K_\alpha(t, \varphi) = \tau_X[K_\alpha(1, 0)]$ ist unmittelbar klar aus der

Definition von τ_X .

Schließlich erhält man noch

$$\begin{aligned} R_\alpha f(e^{i\varphi}, t) &= \int_{K_\alpha(t, \varphi)} f(s) ds = \\ &= t \int_{-\frac{\pi}{2|\alpha|}}^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} f(t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\alpha r) \cdot [\cos(r+\varphi), \sin(r+\varphi)]) \cos^{-1-1/\alpha}(\alpha r) dr = \\ &= t \int_{-\frac{\pi}{2|\alpha|}}^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} f \circ \tau_X [\cos^{-1/\alpha}(\alpha r) [\cos(r), \sin(r)] \cos^{-1-1/\alpha}(\alpha r) dr = \\ &= t \int_{\mathbb{R}^2} f \circ \tau_X(y) \lambda_\alpha(dy) = t \int_{\mathbb{R}^2} f \circ \tau_X(y) \|y\|^{-\gamma} \|y\|^\gamma \lambda_\alpha(dy) = \\ &= t \cdot t^\gamma \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \|\tau_X(y)\|^{-\gamma} f \circ \tau_X(y) \lambda_{\alpha\gamma}(dy) = \\ &= \|x\|^{\gamma+1} \cdot \int_{\mathbb{R}^2} [T_\gamma f](\tau_X(y)) \lambda_{\alpha\gamma}(dy). \end{aligned}$$

3.3 Definition und Bemerkung

Setze $X := \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ mit $(r_1, z_1) + (r_2, z_2) = (r_1 + r_2, z_1 \cdot z_2)$

und $\lambda_X := \lambda_{\mathbb{R}} \otimes \lambda_{\mathbb{T}}$.

Dann ist X isomorph zu $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vermöge der Abbildung

$P : X \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $(r, z) \longmapsto P(r, z) := e^r \cdot z$.

Weiter sei $\pi := P^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow X$, $y \longmapsto \pi(y) := [\ln \|y\|, \frac{y}{\|y\|}]$.

$\nu_{\alpha\beta} := \lambda_{\alpha\beta} \circ \pi^{-1}$ ist dann ein finites Maß auf $B(X)$.

Gemäß Bemerkung I.2.3 ist also für $p \in [1, \infty]$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} : L^p(X, \lambda_X) &\longrightarrow L^p(X, \lambda_X) \\ f &\longmapsto R_{\alpha\beta} f = \nu_{\alpha\beta}^* f \end{aligned}$$

eine stetige lineare Abbildung mit $\|R_{\alpha\beta}\| \leq \nu_{\alpha\beta}(X) = \lambda_{\alpha\beta}(\mathbb{R}^2)$.

$R_{\alpha\beta}$ stellt die Beschreibung der R_{α} -Transformationen in der Terminologie von Kapitel I dar. Die folgenden beiden Lemmata zeigen nun den expliziten Zusammenhang zwischen $R_{\alpha\beta}$ und der zugehörigen Transformation $\tilde{R}_{\alpha}$.

3.4 Lemma

Sei $p \in [1, \infty]$.

Für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ erhält man:

$$1) \quad f \in L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{-2} dx) \iff f \circ P \in L^p(X, \lambda_X)$$

und in diesem Fall gilt $\|f\|_{p, \|x\|^{-2}} = (2\pi)^{3/2p} \cdot \|f \circ P\|_p$.

2) Für beliebige $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt

$$f \in L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{-\gamma p-2} dx) \iff T_\gamma f \in L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{-2} dx)$$

$$\text{und in diesem Fall ist } \|f\|_{p, \|x\|^{-\gamma p-2}} = \|T_\gamma f\|_{p, \|x\|^{-2}}.$$

Beweis

1) Aussage 1) erhält man aus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^p \|x\|^{-2} dx &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |f(r \cdot e^{i\varphi})|^p r^{-1} d\varphi dr = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} |f(e^s \cdot e^{i\varphi})|^p d\varphi ds = (2\pi)^{3/2} \cdot \int_X |f \circ P(x)|^p \lambda_X(dx). \end{aligned}$$

2) Aussage 2) folgt aus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^p \|x\|^{-\gamma p-2} dx &= \int_{\mathbb{R}^2} |f(x) \cdot \|x\|^{-\gamma}|^p \|x\|^{-2} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |T_\gamma f(x)|^p \|x\|^{-2} dx. \end{aligned}$$

3.5 Lemma

Seien $p \in [1, \infty[$ und α, γ gemäß Konvention 3.1 2).

Für jede Abbildung $f \in L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{-\gamma p-2} dx)$ gilt dann:

$$[T_{\gamma+1}(\tilde{R}_\alpha f)] \circ P = R_{\alpha\gamma} \{ (T_\gamma f) \circ P \} \quad \text{in } L^p(X, \lambda_X).$$

Beweis

Bei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{-\tau p-2} dx)$ gilt

$(T_\tau f) \circ P \in L^p(X, \lambda_X)$ nach Lemma 3.4 .

Nach Bemerkung 3.3 gilt also $R_{\alpha\tau}[(T_\tau f) \circ P] \in L^p(X, \lambda_X)$

und für f.a. $x \in X$ erhält man

$$\begin{aligned} R_{\alpha\tau}[(T_\tau f) \circ P](x) &= \mu_{\alpha\tau}^* * [(T_\tau f) \circ P](x) = \\ &= \int_X T_\tau f \circ P(x+y) \mu_{\alpha\tau}(dy) = \int_X T_\tau f \circ \tau_{P(x)}(P(y)) \lambda_{\alpha\tau} \circ \Pi^{-1}(dy) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} T_\tau f \circ \tau_{P(x)}(y) \lambda_{\alpha\tau}(dy) = \|P(x)\|^{-\tau-1} \cdot \tilde{R}_\alpha f[P(x)] = \\ &= [T_{\tau+1}(\tilde{R}_\alpha f)](P(x)) . \end{aligned}$$

3.6 Beweis von (EI.2) und (EII.1)

Seien $p \in [1, \infty[$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\varepsilon dx)$,

wobei $\varepsilon > p-2$ bei $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon < p-2$ bei $\alpha < 0$ sei.

Setze $\tau := -(\varepsilon+2)/p$.

Dann gilt $\tau \in]-\infty, -1[$ bei $\alpha > 0$ und $\tau \in]-1, \infty[$ bei $\alpha < 0$,

so daß die Konvention 3.1 2) gerade erfüllt ist.

Wegen $\varepsilon = -\tau p - 2$ ergibt Lemma 3.5, daß $[T_{\tau+1}(\tilde{R}_\alpha f)] \circ P$

Element von $L^p(X, \lambda_X)$ ist. Aus Lemma 3.4 folgt dann aber

$$\tilde{R}_\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{-(\tau+1)p-2} dx) = L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{\varepsilon-p} dx) .$$

Damit ist (EI.2) bewiesen.

(EII.1) erhält man aus der folgenden Abschätzung.

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\infty |R_{\alpha} f(e^{i\varphi}, r)|^p r^{\varepsilon-p+1} dr d\varphi \right]^{1/p} = \\
 & = \| \tilde{R}_{\alpha} f \|_{p, \|x\|^{\varepsilon-p}} \stackrel{(3.4)}{=} \| T_{\gamma+1}(\tilde{R}_{\alpha} f) \|_{p, \|x\|^{-2}} \stackrel{(3.4)}{=} \\
 & = (2\pi)^{3/2p} \| T_{\gamma+1}(\tilde{R}_{\alpha} f) \circ P \|_p \stackrel{(3.5)}{=} (2\pi)^{3/2p} \| R_{\alpha\gamma}(T_{\gamma} f \circ P) \|_p \stackrel{(3.3)}{\leq} \\
 & \leq (2\pi)^{3/2p} \lambda_{\alpha\gamma}(\mathbb{R}^2) \| T_{\gamma} f \circ P \|_p \stackrel{(3.4)}{=} \lambda_{\alpha\gamma}(\mathbb{R}^2) \| T_{\gamma} f \|_{p, \|x\|^{-2}} \stackrel{(3.4)}{=} \\
 & = \lambda_{\alpha\gamma}(\mathbb{R}^2) \| f \|_{p, \|x\|^{\varepsilon}} .
 \end{aligned}$$

3.7 Beweis von (EI.1)

Sei $p \in [1, \infty[$.

1) Seien $\alpha > 0$ und $\varepsilon < p-2$ oder $\alpha < 0$ und $\varepsilon > p-2$.

Setze $I := [1, \infty[$ falls $\alpha > 0$ bzw. $I :=]0, 1]$

falls $\alpha < 0$, sowie

$$f(x) := \begin{cases} \|x\|^{-1} & \text{für } \|x\| \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^p \|x\|^{\varepsilon} dx = \int_{\{x \mid \|x\| \in I\}} \|x\|^{\varepsilon-p} dx < \infty,$$

da $\varepsilon-p < -2$ falls $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon-p > -2$ falls $\alpha < 0$.

Also ist $f \in L^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{\varepsilon} dx)$.

Andererseits gilt für beliebige $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ gemäß 1.3 :

$$\begin{aligned} & \int_{K_\alpha(t, \varphi)} f(s) \, ds = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2|\alpha|}}^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} \left(t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\alpha r) \right)^{-1} \chi_I \left(t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\alpha r) \right) \frac{t}{\cos^{1+1/\alpha}(\alpha r)} \, dr = \\ &= \frac{2}{|\alpha|} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{-1}(\psi) \chi_I \left(t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\psi) \right) \, d\psi = \\ &= \frac{2}{|\alpha|} \cdot \int_{c(\alpha, t)}^{\pi/2} \cos^{-1}(\psi) \, d\psi = \infty, \end{aligned}$$

wobei $c(\alpha, t) \in [0, \pi/2[$ mit $c(\alpha, t) = 0$ für $t \geq 1$ bei $\alpha > 0$ bzw. für $t \leq 1$ bei $\alpha < 0$ sowie $c(\alpha, t) = \arccos(t^\alpha)$ sonst zu wählen ist.

2) Sei nun $\varepsilon = p-2 > -1$.

Setze $I := [2, \infty[$ für $\alpha > 0$ bzw. $I :=]0, \frac{1}{2}]$

bei $\alpha < 0$, sowie

$$f(x) := \begin{cases} (\|x\| \cdot \ln\|x\|)^{-1} & \text{falls } \|x\| \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^p \|x\|^\varepsilon \, dx = \int_{\{x \mid \|x\| \in I\}} (\ln\|x\|)^{-p} \|x\|^{\varepsilon-p} \, dx =$$

$$= 2\pi \int_I |\ln(r)|^{-p} r^{-2} r \, dr = 2\pi \int_{\ln(I)} |s|^{-p} \, ds < \infty, \text{ da } p > 1.$$

Andererseits gilt für beliebige $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \int_{K_\alpha(t, \varphi)} f(s) \, ds = \\ & \int_{-\frac{\pi}{2|\alpha|}}^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} \left[t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\alpha r) \cdot \ln[t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\alpha r)] \right]^{-1} \chi_I[t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\alpha r)] \, dr = \\ & \quad \cdot \frac{t}{\cos^{1+1/\alpha}(\alpha r)} \, dr = \\ & = \frac{2}{|\alpha|} \int_0^{\pi/2} \left[\cos(\psi) \cdot \ln[t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\psi)] \right]^{-1} \chi_I[t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\psi)] \, d\psi = \dots \end{aligned}$$

Mit der Substitution $r = \ln[t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\psi)]$ erhält man weiter

i) bei $\alpha > 0$:

$$\dots = 2 \int_{\ln(\max(2, t))}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \left[1 - (t \cdot e^{-r})^{2\alpha} \right]^{-1/2} \, dr = \infty.$$

ii) bei $\alpha < 0$:

$$\dots = 2 \int_{-\infty}^{\ln(\min(1/2, t))} \frac{1}{r} \cdot \left[1 - (t \cdot e^{-r})^{2\alpha} \right]^{-1/2} \, dr = -\infty.$$

1) und 2) ergeben zusammen die Aussage (EI.1).

3.8 Beweis von (EII.2)

Sei $p \in [1, \infty[$.

Bei $\varepsilon \leq p-2$ für $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon \geq p-2$ für $\alpha < 0$ und

$f := \chi_{\{1 < \|x\| < 2\}}$ gilt offensichtlich $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^\varepsilon dx)$.

Andererseits erhält man für $\alpha > 0$ und $0 < t \leq 1$ bei beliebigem $\omega \in \mathbb{T}$ $R_\alpha f(\omega, t) \geq 2$, da $K_\alpha(t, \arg \omega)$ den Kreisring $\{1 < \|x\| < 2\}$ zweimal durchläuft.

Bei $\alpha < 0$ ist entsprechend $R_\alpha f(\omega, t) \geq 2$ für $t \geq 2$ und $\omega \in \mathbb{T}$ beliebig.

Unter Beachtung von $\int_{\{\|x\| < 1\}} \|x\|^{-2} dx = \infty = \int_{\{\|x\| > 2\}} \|x\|^{-2} dx$ und

$\varepsilon - p \leq -2$ bei $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon - p \geq -2$ bei $\alpha < 0$ erhält man daraus

$\tilde{R}_\alpha f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2, \|x\|^{\varepsilon - p} dx)$ und $R_\alpha f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \lambda_{\mathbb{T} \otimes \mathbb{R}}(r^{\varepsilon - p + 1} dr))$

3.9 Lemma

1) Seien $\alpha > 0$ und $\gamma < -1$ bzw. $\alpha < 0$ und $\gamma > -1$ gemäß Konvention 3.1 2).

Für die Fouriertransformierte von $\nu_{\alpha, \gamma}$ gilt dann:

$\hat{\nu}_{\alpha, \gamma} : \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\hat{\nu}_{\alpha, \gamma}(s, k) = \hat{g}_{\alpha, \gamma, k}(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} g_{\alpha, \gamma, k}(t) dt.$$

wobei gilt

$$g_{\alpha, \gamma, k}(t) = 2 \cos\left[\frac{k}{\alpha} \arccos(e^{-\alpha t})\right] e^{(\gamma+1)t} (1 - e^{-2\alpha t})^{-1/2} \chi_I(t),$$

und $I =] 0 , \infty [$ bei $\alpha > 0$ bzw. $I =] -\infty , 0 [$ bei $\alpha < 0$.

Man beachte $\mathfrak{S}_{\alpha\mathfrak{T},k} = \mathfrak{S}_{\alpha\mathfrak{T},-k}$.

2) Bei α und $\mathfrak{T}$ wie in 1) erfüllen auch $\alpha' := -\alpha$ und $\mathfrak{T}' := -\mathfrak{T}-2$ die Konvention 3.1 2) und es gilt:

$$\hat{\mu}_{\alpha\mathfrak{T}}(s,k) = \hat{\mu}_{\alpha'\mathfrak{T}'}(-s,k)$$

Beweis

$X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, also gilt $\Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

Und für alle $(s,k) \in \Gamma$ erhält man

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\alpha\mathfrak{T}}(s,k) &= \int_X \langle -(r,z), (s,k) \rangle \mu_{\alpha\mathfrak{T}}(d(r,z)) = \\ &= \int_X e^{-isr} \bar{z}^k \mu_{\alpha\mathfrak{T}}(d(r,z)) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-is \cdot \ln \|x\|} \left(\bar{x}/\|x\| \right)^k \lambda_{\alpha\mathfrak{T}}(dx) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-is \cdot \ln \|x\|} \left(\bar{x}/\|x\| \right)^k \|x\|^{\mathfrak{T}} \lambda_{\alpha}(dx) = \\ &= \frac{\pi}{2|\alpha|} \int_{-\frac{\pi}{2|\alpha|}}^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} e^{-is \cdot \ln [\cos^{-1/\alpha}(\alpha t)]} [\cos(kt) - i \sin(kt)] \cos^{-\mathfrak{T}/\alpha}(\alpha t) \cdot \\ &\quad \cdot \cos^{-1-1/\alpha}(\alpha t) dt = \\ &= \frac{2}{|\alpha|} \int_0^{\pi/2} e^{-is \cdot \ln [\cos^{-1/\alpha}(\psi)]} \cos(k\psi/\alpha) \cos^{-\frac{\mathfrak{T}+1}{\alpha}-1}(\psi) d\psi = \dots \end{aligned}$$

Mit der Substitution $t = \ln [\cos^{-1/\alpha}(\psi)]$ erhält man daraus weiter

$$\dots = 2 \int_I e^{-ist} \cos\left[\frac{k}{\alpha} \arccos(e^{-\alpha t})\right] e^{(\gamma+1)t} [1-e^{-2\alpha t}]^{-1/2} dt = \dots$$

i) $\dots = \hat{g}_{\alpha\gamma, k}(s)$, so daß 1) gilt.

$$\text{ii) } \dots = 2 \int_I e^{-i(-s)(-t)} \cos\left[\frac{k}{\alpha} \arccos(e^{-(-\alpha)(-t)})\right] \cdot$$

$$e^{((- \gamma - 2) + 1)(-t)} [1 - e^{-2(-\alpha)(-t)}]^{-1/2} dt,$$

so daß mit der Substitution $r = -t$ 2) folgt.

3.10 Folgerung

Seien $j_1 : X \longrightarrow X$, $(r, z) \longmapsto j_1(r, z) := (-r, z)$

und $J_1 f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto J_1 f(x) := f \circ j_1(x)$

(bei $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ beliebige Abbildung).

Dann gilt für α und γ gemäß Konvention 3.1 2) sowie α'

und γ' wie in Lemma 3.9 :

$$\mu_{\alpha\gamma} = \mu_{\alpha'\gamma'} \circ j_1^{-1}.$$

Und für alle $f \in L^p(X, \lambda_X)$ ($1 \leq p \leq \infty$) erhält man

$$J_1[R_{\alpha\gamma}f] = R_{\alpha'\gamma'}[J_1f] \quad \text{bzw. in anderer}$$

$$\text{Schreibweise} \quad R_{\alpha\gamma}f = J_1[R_{\alpha'\gamma'}[J_1f]].$$

Beweis

Die erste Aussage folgt wegen $\hat{\mu}_{\alpha'\gamma'}(-s, k) = [\mu_{\alpha'\gamma'} \circ j_1]^\wedge(s, k)$

aus Lemma 3.9 2) und der Injektivität der Fouriertransformation.

Zum Beweis der zweiten Aussage sei $f \in L^P(X, \lambda_X)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 J_1 \{ R_{\alpha, \tau} f \} (r, z) &= R_{\alpha, \tau} f(-r, z) = \\
 &= \int_X f \{ (-r, z) + (s, w) \} \mu_{\alpha, \tau}(d(s, w)) = \\
 &= \int_X f \{ (-r, z) + (-s, w) \} \mu_{\alpha, \tau} \circ j_1^{-1}(d(s, w)) = \\
 &= \int_X J_1 f \{ (r, z) + (s, w) \} \mu_{\alpha', \tau'}(d(s, w)) = \\
 &= R_{\alpha', \tau'} \{ J_1 f \} (r, z) .
 \end{aligned}$$

3.11 Satz

Für $p = 1$ und $p = 2$ ist $R_{\alpha, \tau} |_{L^P(X, \lambda_X)}$ injektiv.

Beweis

1) Nach Satz I.4.1 bzw. I.4.2 genügt es zu zeigen, daß

$$\hat{\mu}_{\alpha, \tau}(s, k) \neq 0 \quad \text{für f.a. } (s, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \quad \text{gilt.}$$

Mit Lemma 3.9 1) ist also für alle $k \in \mathbb{Z}$ zu zeigen:

$$\hat{g}_{\alpha, \tau, k}(s) \neq 0 \quad \text{für f.a. } s \in \mathbb{R} .$$

Wegen 3.9 2) genügt es, den Fall $\alpha > 0$ zu betrachten.

2) In 3) wird gezeigt, daß $\hat{g}_{\alpha, \tau, k}$ holomorph fortsetzbar ist

auf den Streifen $\{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| < -\tau-1 \} .$

Da aber $\hat{g}_{\alpha\tau,k}$ nicht identisch gleich Null ist, hat $\hat{g}_{\alpha\tau,k}$ höchstens abzählbar viele Nullstellen.

Damit folgt die Behauptung.

3) Nach einem Fortsetzungssatz für Fouriertransformierte

ist $\hat{g}_{\alpha\tau,k}$ holomorph fortsetzbar auf den Streifen

$\{ |\operatorname{Im}(z)| < -\tau-1 \}$, falls gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{tr} \cdot g_{\alpha\tau,k}(r)| \, dr < \infty \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ mit } |t| < -\tau-1.$$

Sei also $|t| < -\tau-1$.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} |e^{tr} g_{\alpha\tau,k}(r)| \, dr \leq \\ & \leq 2 \int_0^{\infty} e^{tr} e^{(\tau+1)r} [1 - e^{-2\alpha r}]^{-1/2} \, dr \leq \\ & \leq 2 \int_0^{\infty} e^{(|t|+\tau+1)r} [1 - e^{-2\alpha r}]^{-1/2} \, dr = \\ & = \frac{2}{\alpha} \int_0^1 s^{-\frac{|t|+\tau+1}{\alpha} - 1} [1 - s^2]^{-1/2} \, ds < \infty, \end{aligned}$$

da $-(|t|+\tau+1)/\alpha > 0$ gilt.

3.12 Aussage (EIII) ergibt sich nun aus Lemma 3.5 (mit

$\tau = -(\epsilon+2)/p$, $\epsilon = -\tau p - 2$) und Satz 3.11.

3.13 Beweis von (EIV.1)

1) Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} I_{\gamma}(I_{\gamma}f)(x) &= \|x\|^{-\gamma} I_{\gamma}f(x/\|x\|^2) = \|x\|^{-\gamma} (1/\|x\|)^{-\gamma} f(x) = \\ &= f(x) . \end{aligned}$$

2) Die Linearität von I_{γ} ist klar. Die restliche Aussage folgt aus

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^p \|x\|^{\varepsilon} dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |f(r \cdot e^{i\varphi})|^p r^{\varepsilon} r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |f(\frac{1}{t} e^{i\varphi})|^p t^{-\varepsilon-3} dt d\varphi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |f(x/\|x\|^2)|^p \|x\|^{-\varepsilon-4} dx = \int_{\mathbb{R}^2} |I_{\gamma}f(x)|^p \|x\|^{\gamma p - \varepsilon - 4} dx . \end{aligned}$$

3.14 Beweis von (EIV.2)

Der Beweis von (EIV.2) basiert auf Lemma 3.5 in Verbindung mit Folgerung 3.10, deren Aussagen punktweise angewandt werden. Dies ist - bei Existenz der auftretenden Integrale - möglich, wie die Beweise zeigen.

Sofern eines der folgenden Integrale existiert, erhält man für eine meßbare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ und $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_{\alpha\gamma}(x) &= \|x\|^{\gamma+1} \int_X T_\gamma f \circ P \left[(\ln\|x\|, x/\|x\|) + y \right] \mu_{\alpha\gamma}(dy) \quad (3.10) \\
 &= \|x\|^{\gamma+1} \int_X J_1 \left[T_\gamma f \circ P \right] \left[(-\ln\|x\|, x/\|x\|) + y \right] \mu_{\alpha', \gamma'}(dy) \quad (*) \\
 &= \left[1/\|x\| \right]^{\gamma'+1} \int_X T_{\gamma'} \left[I_2 f \right] \circ P \left[(-\ln\|x\|, x/\|x\|) + y \right] \mu_{\alpha', \gamma'}(dy) \quad (3.5) \\
 &= \tilde{R}_{\alpha'} \left[I_2 f \right] (x/\|x\|^2) .
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Zu (*):

$$\begin{aligned}
 J_1 \left[T_\gamma f \circ P \right] (-r, \omega) &= T_\gamma f \left[e^r \cdot \omega \right] = e^{-\gamma r} f \left[e^r \cdot \omega \right] = \\
 &= e^{(-\gamma-2)r} e^{(-2)(-r)} f \left[e^r \cdot \omega \right] = T_{\gamma'} \left[I_2 f \right] (e^{-r} \cdot \omega) .
 \end{aligned}$$

3.15 Bemerkung

Neben dem in 3.10 formulierten Zusammenhang zwischen $R_{\alpha\gamma}$ und $R_{\alpha', \gamma'}$, mit dem Aussage (EIV.2) bewiesen wurde, gilt auch die folgende Beziehung:

Bei α, γ gemäß Konvention 3.1 2) und $\alpha' = -\alpha$ sowie $\gamma' = -\gamma-2$ (wie in 3.10) erhält man $R_{\alpha\gamma} = R_{\alpha', \gamma'}^*$ bzw. $R_{\alpha\gamma}^* = R_{\alpha', \gamma'}$.
 $R_{\alpha\gamma}$ und $R_{\alpha', \gamma'}$ sind also zueinander adjungiert.

Beweis

Nach 3.9 gilt $\hat{\mu}_{\alpha\gamma}(s, k) = \hat{\mu}_{\alpha', \gamma'}(-s, -k)$ für alle $(s, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

Also folgt $\mu_{\alpha\gamma} = (\mu_{\alpha', \gamma'})^*$ und I.2.4 ergibt die Behauptung.

II.4 Inversion der R_α -Transformationen

Durch den in Lemma 3.5 formulierten Zusammenhang

$$\left[T_{\tau+1}(\tilde{R}_\alpha f) \right] \circ P = R_{\alpha\tau} \left[(T_\tau f) \circ P \right] \quad \text{zwischen den}$$

R_α -Transformationen und den Transformationen $R_{\alpha\tau}$ erhält man

ein Verfahren zur Umkehrung der R_α -Transformationen, indem

man die Inversionsformel I.4.4 auf $R_{\alpha\tau}$ anwendet.

Dieses Verfahren wird im folgenden beschrieben.

In Abschnitt II.4 seien stets $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und τ zu

α gemäß Konvention 3.1 2) gewählt. Im Hinblick auf die

Anwendung der Inversionsformel wird außerdem nur der Fall

$p = 1$ betrachtet.

Zunächst erhält man unmittelbar aus der Inversionsformel I.4.4

den folgenden Satz für die Transformationen $R_{\alpha\tau}$.

4.1 Inversionsformel für $R_{\alpha\tau}$

Die Abbildung $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}, \lambda_{\mathbb{R}} \otimes \lambda_{\mathbb{T}}) \cap C^b(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ erfülle eine der folgenden Bedingungen:

(B) Es gibt eine Konstante C mit

$$\left| \sum_{j=1}^m a_j \cdot g(r_j, z_j) \right| \leq C \cdot \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^m a_j \cdot e^{i r_j s} \cdot z_j^k \right| \mid (s, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \right\}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{C}$ und $(r_j, z_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ ($j=1, \dots, m$).

bzw.

(S) Es gibt eine Konstante M mit

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} h(r, e^{i\varphi}) \cdot g(r, e^{i\varphi}) \, d\varphi \, dr \right| \leq M \cdot \sup \left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-i(rs+k\varphi)} \cdot h(r, e^{i\varphi}) \, d\varphi \, dr \right| \mid (s, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \right\}$$

für alle $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}, \lambda_{\mathbb{R}} \otimes \lambda_{\mathbb{T}})$.

Dann gilt für alle $(r, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$g(r, e^{i\varphi}) = (2\pi)^{-1/2} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\hat{R}_{\alpha\bar{\gamma}} g)^{\wedge}(s, k)}{\hat{\mu}_{\alpha\bar{\gamma}}(-s, -k)} e^{irs} \, ds \cdot e^{ik\varphi}$$

wobei

$$(\hat{R}_{\alpha\bar{\gamma}} g)^{\wedge}(s, k) = (2\pi)^{-3/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-i(rs+k\varphi)} \cdot R_{\alpha\bar{\gamma}} g(r, e^{i\varphi}) \, dr \, d\varphi$$

und $\hat{\mu}_{\alpha\bar{\gamma}}$ gemäß Lemma 3.9 1) berechnet werden kann.

Wie der Beweis von Lemma 3.5 zeigt, gilt die dortige Aussage auch punktweise, wenn die Existenz der auftretenden Integrale vorausgesetzt wird.

Für die R_{α} -Transformationen erhält man speziell

4.2 Lemma

Für eine Abbildung $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, \|x\|^{-\delta-2} dx)$ gilt bei

$g := T_{\bar{\gamma}} f \circ P$, also $g(r, z) = e^{-\bar{\gamma}r} \cdot f(e^r \cdot z)$ ($(r, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$):

$$\begin{aligned} R_{\alpha\gamma}g(r,z) &= \left[T_{\gamma+1}(\tilde{R}_{\alpha}f) \right] \circ P(r,z) = \\ &= e^{-(\gamma+1)r} \cdot \tilde{R}_{\alpha}f(e^r \cdot z) = e^{-(\gamma+1)r} \cdot R_{\alpha}f(z, e^r) \end{aligned}$$

für alle $(r,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$, für die $R_{\alpha\gamma}g(r,z)$ existiert.

Damit läßt sich nun das folgende Umkehrverfahren für die R_{α} -Transformationen formulieren.

4.3 Inversion der R_{α} -Transformationen

Seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\varepsilon > -1$ für $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon < -1$ für $\alpha < 0$, so daß $\gamma := -\varepsilon - 2$ gerade die Konvention 3.1 2) erfüllt.

Weiter sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, \|x\|^{-\varepsilon} dx)$.

Und die durch $g := T_{\gamma}f \circ P$ definierte Abbildung

$g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}, \lambda_{\mathbb{R}} \otimes \lambda_{\mathbb{T}})$ erfülle die Voraussetzungen von Satz 4.1.

Dann läßt sich $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit folgendem Verfahren aus $R_{\alpha}f$ bestimmen:

- 1) Berechne $R_{\alpha\gamma}g$ aus $R_{\alpha}f$ gemäß Lemma 4.2.
- 2) Bestimme g aus $R_{\alpha\gamma}g$ durch die Umkehrformel in Satz 4.1.
- 3) $f(x) = \|x\|^{-\gamma} \cdot g(\ln\|x\|, x/\|x\|)$.

Anmerkung: $R_{\alpha\gamma}g(r,z)$ existiert für alle $(r,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$,
da $g \in C^b(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ vorausgesetzt ist.

III. Beispiel: Das Pompeiu-Problem und die Pompeiu-Transformation

1929 befaßte sich der rumänische Mathematiker D. Pompeiu mit folgender Problemstellung:

$D \subset \mathbb{R}^2$ sei ein beschränktes Gebiet und Σ bezeichne die Gruppe aller Bewegungen in der Ebene.

Ist dann $f=0$ die einzige stetige Funktion auf $\mathbb{R}^2$, für die gilt:

$$\iint_{\sigma(D)} f(x,y) \, dx \, dy = 0 \quad \text{für alle } \sigma \in \Sigma \, ?$$

In seinem ersten Artikel [16] zu diesem Thema gibt Pompeiu eine positive Antwort für den Fall eines Kreises als Gebiet D . Wie sich später herausstellte, ist diese Aussage jedoch falsch. Die Funktion $f(x,y) := \exp(iay)$ ist bei geeignetem a ein bekanntes Gegenbeispiel. Richtig hingegen sind die Aussagen in [17], wo sich Pompeiu mit einem rechteckigen Gebiet D beschäftigt.

Inzwischen haben sich viele Autoren intensiv mit dem Pompeiu-Problem und verwandten Fragestellungen wie dem Morera-Problem befaßt und weitgehende Resultate erarbeitet (siehe z.B. Brown, Schreiber, Taylor [2]).

Eine umfangreiche Literaturliste findet man bei Zalzman [26].

III.1 Die Pompeiu-Transformation auf $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$)

Um das Pompeiu-Problem im Rahmen der Theorie der Radon-Transformationen zu behandeln, wird es umformuliert in die Frage nach der Injektivität der Pompeiu-Transformation, die im folgenden definiert wird, wobei gleichzeitig einige Verallgemeinerungen vorgenommen werden.

1.1 Definition

Seien $\mu \in M^b(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$) ein komplexwertiges Borel-Maß, $A \in O(n)$ eine orthogonale Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$.

Für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ sei dann - sofern existent -

$$\begin{aligned} P_\mu f(A, x) &:= \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda y + x) \mu(dy) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + y) \mu \circ A^{-1}(dy) = \\ &= [f * (\mu \circ A^{-1})^*](x) . \end{aligned}$$

Existiert für alle $A \in O(n)$ $P_\mu f(A, x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, so heißt $P_\mu f$ die Pompeiu-Transformierte von f .

Mit den Resultaten aus Kapitel I (2.2, 2.3, 4.1 und 4.2)
für $(X, +) = (\mathbb{R}^n, +)$ erhält man direkt die folgenden ersten

1.2 Ergebnisse

Für $1 \leq p \leq \infty$ und beliebige $A \in O(n)$ gilt:

(E1) Die Abbildung

$$P_A : L^p(\mathbb{R}^n, dx) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, dx), \quad f \longmapsto P_A f$$

$$\text{mit } P_A f(x) := P_\nu f(A, x) = \left[f * (\nu \circ A^{-1})^* \right](x)$$

(für f.a. $x \in \mathbb{R}^n$) ist wohldefiniert, linear und
stetig mit $\|P_A\| \leq \|\nu\|$.

(E2) Ist $\lambda_n(\hat{\mu} = 0) = 0$, also auch $\lambda_n\{[(\nu \circ A^{-1})^\wedge = 0]\} = 0$,

so ist P_A auf $L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ und $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ injektiv.

Durch Fourierrücktransformation erhält man für alle

$f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ mit $P_A f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ folgende

Umkehrformel:

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} [(\nu \circ A^{-1})^\wedge(-\xi)]^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} P_A f(y) e^{-i\langle \xi, y \rangle} dy e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

1.3 Anmerkung

Besitzt das integrierende Maß ν kompakten Träger (und ist
nicht das Nullmaß), so ist die Voraussetzung an $\hat{\mu}$ in (E2)
stets erfüllt.

Beweis

Da μ kompakten Träger besitzt, ist $\hat{\mu}$ auf ganz $\mathbb{C}^n$ holomorph fortsetzbar. Mit dem Fortsetzungssatz von Weierstraß läßt sich aber zeigen, daß die (reellen) Nullstellen einer jeden holomorphen Funktion, die nicht identisch Null ist, eine Nullmenge bilden. Also ist die Voraussetzung in (E2) erfüllt.

1.4 Das klassische Beispiel (n=2) (vgl. z.B. Brown [2])

Seien $D := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq r \}$ die Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ und μ das auf D konzentrierte Lebesguemaß.

Mit den Besselfunktionen

$$J_\nu(x) = 1/2\pi \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin \varphi - \nu \varphi)} d\varphi \quad (\nu=0,1,\dots)$$

und der Beziehung $d/dx [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$ ($\nu=1,2,\dots$)

(siehe Erdelyi [11]) erhält man für $t > 0$ und $\psi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} [t \cdot e^{i\psi}] &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-it \langle e^{i\psi}, y \rangle} \mu(dy) = \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} e^{-i\varrho t (\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi)} d\varphi \varrho d\varrho = \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} e^{-i\varrho t \cos(\varphi-\psi)} d\varphi \varrho d\varrho = \int_0^r \int_0^{2\pi} e^{-i\varrho t \sin \vartheta} d\vartheta \varrho d\varrho = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \int_0^r J_0(\varrho t) \varrho \, d\varrho = \frac{2\pi}{t^2} \int_0^{rt} s J_0(s) \, ds = \frac{2\pi}{t^2} \left[s J_1(s) \right]_0^{rt} = \\
 &= 2\pi \frac{r}{t} J_1(rt) \quad \text{und} \quad \hat{\mu}(0) = \mu(D) = r^2\pi.
 \end{aligned}$$

Die Nullstellenmenge von $\hat{\mu}$ wird somit gebildet aus unendlich vielen isolierten Kreisen K_t mit $rt \in \{s > 0 \mid J_1(s) = 0\}$.

Daher ist P_μ auf $L^1(\mathbb{R}^2, dx)$ und $L^2(\mathbb{R}^2, dx)$ injektiv.

Andererseits existiert eine beschränkte stetige Abbildung

f mit $P_\mu f = 0$:

Bei $f(x, y) := e^{iay}$ mit $J_1(ar) = 0$ gilt für alle $\lambda \in O(2)$

und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
 P_\mu f \left[\lambda, (x, y) \right] &= \int_0^r \int_0^{2\pi} f(x + \varrho \cos \varphi, y + \varrho \sin \varphi) \, d\varphi \, \varrho \, d\varrho = \\
 &= \int_0^r \int_0^{2\pi} e^{ia(y + \varrho \sin \varphi)} \, d\varphi \, \varrho \, d\varrho = e^{iay} \int_0^r \int_0^{2\pi} e^{ia\varrho \sin \varphi} \, d\varphi \, \varrho \, d\varrho = \\
 &= 2\pi e^{iay} \int_0^r J_0(a\varrho) \, \varrho \, d\varrho = 2\pi e^{iay} \frac{r}{a} J_1(ar) = 0.
 \end{aligned}$$

Der wesentliche Grund dafür, daß im vorliegenden Beispiel die Injektivität verlorengeht, ist die Rotationssymmetrie der

Kreisscheibe D . Nur die Translationen liefern Informationen über die integrierte Abbildung f , die Drehungen dagegen sind wirkungslos.

Die Rotationssymmetrie von μ hat zur Folge, daß $\hat{\mu}$ ebenfalls rotationssymmetrisch ist. Ist also $\hat{\mu}$ in einem Punkt x_0 gleich Null, dann auch auf der ganzen Kreislinie $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = \|x_0\|\}$.

Tatsächlich erhält man Injektivität auch auf L^∞ , falls die Fouriertransformierte $\hat{\mu}$ des integrierenden Maßes auf keiner Sphäre identisch Null ist. Der folgende Satz dazu ergibt sich aus Abschnitt 6 in Brown, Schreiber, Taylor [2]. Der Beweis beruht auf der Theorie der Spektralsynthese, die in Kapitel 7 in Rudin [21] beschrieben ist.

1.5 Satz

(E3) Ist $\mu \in M^b(\mathbb{R}^n)$ und gilt für alle $r \geq 0$

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$ ist keine Teilmenge von $\hat{\mu}^{-1}(\{0\})$,

so ist P_μ auf $L^\infty(\mathbb{R}^n, dx)$ injektiv.

III.2 Pompeiu-Transformationen mit kompaktem Träger

Um auch für unbeschränkte stetige Abbildungen die Existenz der Pompeiu-Transformierten zu garantieren, ist es sinnvoll, für das integrierende Maß μ kompakten Träger zu fordern.

In diesem Fall, der in diesem Abschnitt stets vorausgesetzt sei, existiert für alle stetigen Abbildungen f auf $\mathbb{R}^n$ die Pompeiu-Transformierte $P_\mu f(A, x)$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und für alle $A \in O(n)$.

In Analogie zu Satz 1.5 erhält man folgendes Ergebnis:

2.1 Satz

(E4) Sei $\mu \in M^b(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$) ein komplexwertiges Borel-Maß mit kompaktem Träger. Für beliebige $r \geq 0$ sei weiter $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$ keine Teilmenge von $\hat{\mu}^{-1}(\{0\})$.

Dann gilt für alle Abbildungen $f \in C(\mathbb{R}^n)$ mit der folgenden Eigenschaft

(AR) $\exists N \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| (1 + \|x\|^2)^{-N} dx < \infty ;$$

Aus $P_\mu f(A, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $A \in O(n)$

folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

2.2 Bemerkung

1) Nach Dierolf [9] gilt:

Für eine lokalintegrierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ ist die Eigenschaft (AR) äquivalent dazu, daß für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $f \cdot \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, dx)$ gilt.

Und in diesem Fall wird durch $\Lambda_f \varphi := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$

eine absolutreguläre temperierte Distribution Λ_f definiert.

2) Jede durch ein Polynom beschränkte stetige Abbildung f erfüllt die Voraussetzungen in Satz 2.1 .

3) Im Fall $n = 2$ gilt für $f \in C(\mathbb{R}^2)$ stets:

$$P_\mu f = 0 \implies f = 0 .$$

Die Forderung der Eigenschaft (AR) ist in dieser Situation also überflüssig. Siehe hierzu Brown [2].

Beweis von Satz 2.1

Seien f und μ wie im Satz.

1) Für $A \in O(n)$ sei $v_A := (\mu \circ A^{-1})^*$.

Mit μ besitzt dann auch v_A kompakten Träger und es existieren alle Momente von v_A . Damit gilt $\hat{v}_A \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und alle Ableitungen sind beschränkt, so daß für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{v}_A \cdot \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ folgt.}$$

2) Sei $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Für beliebige $y \in \mathbb{R}^n$ gilt dann wegen

$$1 + \|z-y\|^2 \leq 2 \left(1 + \|z\|^2 \right) \cdot \left(1 + \|y\|^2 \right) \quad (z \in \mathbb{R}^n)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(z-y)| \cdot |\hat{\varphi}(z)| \, dz \leq$$

$$\leq \sup \left\{ \left(1 + \|z-y\|^2 \right)^N |\hat{\varphi}(z)| \mid z \in \mathbb{R}^n \right\} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |f(z-y)| \left(1 + \|z-y\|^2 \right)^{-N} \, dz \leq$$

$$\leq C \cdot \left(1 + \|y\|^2 \right)^N.$$

Damit ist die Abbildung $(z, y) \mapsto f(z-y) \cdot \hat{\varphi}(z) \quad (z, y \in \mathbb{R}^n)$

$\lambda_n \otimes \nu_A$ - integrierbar (*), und mit dem Satz von Fubini

erhält man den folgenden Faltungssatz:

$$\begin{aligned} \Lambda_{f * \nu_A}^{\hat{\varphi}}[\varphi] &:= \Lambda_{f * \nu_A}^{\hat{\varphi}}[\hat{\varphi}] = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(z) [f * \nu_A](z) \, dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(z) \int_{\mathbb{R}^n} f(z-y) \, \nu_A(dy) \, dz \stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(z) f(z-y) \, dz \, \nu_A(dy) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x+y) f(x) \, dx \, \nu_A(dy) = \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x+y) \, \nu_A(dy) \, dx = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x+y, z \rangle} \varphi(z) \, dz \, \nu_A(dy) \, dx = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, z \rangle} \varphi(z) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle z, y \rangle} \, \nu_A(dy) \, dz \, dx = \end{aligned}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, z \rangle} \varphi(z) \hat{v}_A(z) \, dz \, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[\hat{v}_A \cdot \varphi \right]^\wedge(x) \, dx = \Lambda_f^\wedge \left[\hat{v}_A \cdot \varphi \right].$$

$$3) \quad \hat{v}_A(x) = [(\mu \circ A^{-1})^*]^\wedge(x) = [\mu \circ A^{-1}]^\wedge(-x) = \hat{\mu}[-A^t x]$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Da nach Voraussetzung $\hat{\mu}^{-1}[\{0\}]$ keine Sphäre enthält,

gibt es für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ein $A_x \in O(n)$ mit $\hat{v}_{A_x}(x) \neq 0$.

Da $\hat{v}_{A_x}$ stetig ist, gilt $\hat{v}_{A_x}(y) \neq 0$ für alle y aus

einer offenen Umgebung U_x von x .

4) Sei $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset D(\mathbb{R}^n)$ eine Partition der Eins zur

Überdeckung $\{U_x\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ von $\mathbb{R}^n$ mit $\text{supp } \varphi_i \subset U_{x_i} =: U_i$

für ein $x_i \in \mathbb{R}^n$ ($i \in \mathbb{N}$).

Bei $A_i := A_{x_i}$ werden dann durch $\psi_i := \frac{\varphi_i}{\hat{v}_{A_i}}$ ($i \in \mathbb{N}$)

Abbildungen $\psi_i \in D(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert.

5) Sei $P_\mu f = 0$

Für alle $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ und alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\psi_i \cdot \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

nach 4).

Und mit 2) erhält man für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$0 = \Lambda_f^{\wedge} (\psi_i \cdot \varphi) = \Lambda_f^{\wedge} [\hat{v}_{\lambda_i} \cdot \psi_i \cdot \varphi] = \Lambda_f^{\wedge} (\varphi_i \cdot \varphi) .$$

Weiter gilt $\varphi = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i$ und die Summe ist endlich,

da φ kompakten Träger besitzt.

$$\text{Also gilt auch } 0 = \Lambda_f^{\wedge} [\varphi] = \Lambda_f [\hat{\varphi}] .$$

Schließlich ist $D(\mathbb{R}^n)$ dicht in $S(\mathbb{R}^n)$ und die Fouriertrans-

formation $\wedge : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ ist ein topologischer und

algebraischer Automorphismus, so daß man $\Lambda_f = 0$ erhält

Mit der Stetigkeit von f folgt hieraus $f = 0$.

IV. Radontransformationen als Mischungen von Faltungen:

R_K -Transformationen

Bei der Darstellung von Radontransformationen als Faltungsoperatoren ergeben sich in einigen Fällen größere Schwierigkeiten: Es läßt sich keine geeignete Gruppe X finden, die die Anwendung der Theorie aus Abschnitt I erlaubt.

Eine andere Möglichkeit besteht nun darin, die Radontransformationen als Mischungen von Faltungen darzustellen.

Dieses Verfahren wird im folgenden beschrieben.

IV.1 Die Radontransformationen R_K auf L^p

Wie in Teil I sei $(X, +)$ eine polnische, lokalkompakte abelsche Gruppe mit Haar-Maß $\lambda_X|_{\mathcal{B}(X)}$.

Zusätzlich sei $(\Omega, \mathcal{K}(\Omega))$ ein Meßraum mit einem finiten Maß $\lambda_\Omega : \mathcal{K}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$.

1.1 Definition

$K : \Omega \times \Omega \times \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ sei ein $\Omega \times \Omega \times \mathcal{B}(X)$ -Kern. d.h.

$$(i) \quad \forall \omega, \xi \in \Omega \quad \text{ist} \quad K(\omega, \xi; \cdot) \in M^{D^+}(X)$$

und (ii) $\forall B \in \mathcal{B}(X)$ ist $K(\cdot, \cdot; B) : (\Omega \times \Omega, \mathcal{K}(\Omega) \otimes \mathcal{K}(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$
meßbar.

Außerdem existiere ein $C_K \geq 0$ mit:

$$\int_{\Omega} K(\omega, \xi; X) \lambda_{\Omega}(d\omega) \leq C_K \quad \text{für alle } \xi \in \Omega$$

und

$$\int_{\Omega} K(\omega, \xi; X) \lambda_{\Omega}(d\xi) \leq C_K \quad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Dann heißt K integrierender Kern.

1.2 Definition

Wie in Teil I bezeichnen

$T_X: X \rightarrow X, y \mapsto T_X(y) := y+x$ die Translation um $x \in X$ und

$j: X \rightarrow X, x \mapsto -x$ die Inversion in X .

Für einen integrierenden Kern K seien bei $\omega, \xi \in \Omega$ und $x \in X$:

$$K_X(\omega, \xi; \cdot) := K(\omega, \xi; \cdot) \circ T_X^{-1} \quad \text{und}$$

$$K^*(\omega, \xi; \cdot) := K(\omega, \xi; \cdot) \circ j^{-1} \quad \text{sowie}$$

$$\mu_X(\omega; \cdot) : K(\Omega) \otimes \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad \text{mit}$$

$$\mu_X(\omega; \lambda) := \int_{\Omega} K_X(\omega, \xi; \lambda_{\xi}) \lambda_{\Omega}(d\xi) \quad \left[\lambda \in K(\Omega) \otimes \mathcal{B}(X) \right],$$

so daß μ_X einen $\Omega \times K(\Omega) \otimes \mathcal{B}(X)$ - Kern definiert.

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich die durch den Kern K gegebene Radontransformation R_K wie folgt definieren:

1.3 Definition und Satz

Für einen integrierenden Kern K und $p \in [1, \infty]$ ist

$$R_K : L^p(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X) \longrightarrow L^p(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X)$$

$$f \longmapsto R_K f$$

$$\text{mit } R_K f(\omega, x) := \int_{\Omega \times X} f(\xi, z) \mu_x(\omega; d(\xi, z)) =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} \int_X f(\xi, z) K_x(\omega, \xi; dz) \lambda_{\Omega}(d\xi) = \int_{\Omega} \int_X f(\xi, z+x) K(\omega, \xi; dz) \lambda_{\Omega}(d\xi) = \\ &= \int_{\Omega} \left[f(\xi, \cdot) * K^*(\omega, \xi; \cdot) \right](x) \lambda_{\Omega}(d\xi) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte, lineare und stetige Abbildung mit

$\|R_K\| \leq C_K$. $R_K f$ heißt R_K -Transformierte von f .

Beweis

a) Seien $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in L^p(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X)$.

Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \int_X \left[\int_{\Omega} \int_X |f(\xi, x+z)| K(\omega, \xi; dz) \lambda_{\Omega}(d\xi) \right]^p \lambda_X(dx) \lambda_{\Omega}(d\omega) \leq$$

$$\leq \int_{\Omega} \int_X \left[\int_{\Omega} \int_X |f(\xi, x+z)|^p K(\omega, \xi; dz) \lambda_{\Omega}(d\xi) \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{\Omega} \int_X 1^q K(\omega, \xi; dz) \lambda_{\Omega}(d\xi) \right]^{p/q} \lambda_X(dx) \lambda_{\Omega}(d\omega) \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C_K^{p/q} \cdot \int_{\Omega} \int_X \int_{\Omega} \int_X |f(\xi, x+z)|^p K(\omega, \xi; dz) \lambda_{\Omega}(d\xi) \lambda_X(dx) \lambda_{\Omega}(d\omega) = \\
 &= C_K^{p/q} \cdot \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_X \int_X |f(\xi, x+z)|^p \lambda_X(dx) K(\omega, \xi; dz) \lambda_{\Omega}(d\omega) \lambda_{\Omega}(d\xi) = \\
 &= C_K^{p/q} \cdot \int_{\Omega} \left[\int_X |f(\xi, x)|^p \lambda_X(dx) \right] \cdot \left[\int_{\Omega} K(\omega, \xi; X) \lambda_{\Omega}(d\omega) \right] \lambda_{\Omega}(d\xi) \leq \\
 &\leq C_K^{p/q} \cdot C_K \cdot \int_{\Omega} \int_X |f(\xi, x)|^p \lambda_X(dx) \lambda_{\Omega}(d\omega) = C_K^p \cdot \|f\|_p^p.
 \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Fubini existiert also das Integral

$$\int_{\Omega} \int_X |f(\xi, x+z)| K(\omega, \xi; dz) \lambda_{\Omega}(d\xi) \quad \text{für } \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X\text{-f.a.} \quad (\omega, x) \in \Omega \times X$$

und die induzierte Abbildung $R_K f$ ist aus $L^p(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X)$.

Da R_K offensichtlich linear ist, folgt auch die Stetigkeitsaussage.

b) Sei $p=1$:

Die Behauptung folgt dann analog a) aus:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \int_X \left[\int_{\Omega} \int_X |f(\xi, x+z)| K(\omega, \xi; dz) \lambda_{\Omega}(d\xi) \right] \lambda_X(dx) \lambda_{\Omega}(d\omega) = \\
 &= \int_{\Omega} \left[\int_X |f(\xi, x)| \lambda_X(dx) \int_{\Omega} K(\omega, \xi; X) \lambda_{\Omega}(d\omega) \right] \lambda_{\Omega}(d\xi) \leq \\
 &\leq C_K \cdot \|f\|_1 \quad \text{für } f \in L^1(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X).
 \end{aligned}$$

c) Sei $p=\infty$:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \int_X |f(\xi, x+z)| K(\omega, \xi; dz) \lambda_{\Omega}(d\xi) \leq \|f\|_{\infty} \cdot \int_{\Omega} K(\omega, \xi; X) \lambda_{\Omega}(d\xi) \leq \\
 &\leq C_K \cdot \|f\|_{\infty} \quad \text{für } f \in L^{\infty}(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X) \quad \text{ergibt die Behauptung.}
 \end{aligned}$$

IV.2 Invertibilität der R_K -Transformationen

In diesem Abschnitt sei stets $K: \Omega \times \Omega \times B(X) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ ein integrierender Kern gemäß Abschnitt IV.1.

2.1 Definition

Für $\vartheta \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \lambda_\Omega)$ sei $K_\vartheta: \Omega \times B(X) \longrightarrow \mathbb{K}$ mit

$$K_\vartheta(\omega; \cdot) := \int_{\Omega} \vartheta(\varepsilon) K(\omega, \varepsilon; \cdot) \lambda_\Omega(d\varepsilon) \quad (\omega \in \Omega).$$

Dann ist $K_\vartheta(\omega; \cdot)$ ein finites $\mathbb{K}$ -wertiges Maß auf $B(X)$ mit

$$\|K_\vartheta(\omega; \cdot)\| \leq \int_{\Omega} |\vartheta(\varepsilon)| K(\omega, \varepsilon; X) \lambda_\Omega(d\varepsilon) \leq \|\vartheta\|_\infty \cdot C_K.$$

2.2 Satz

Seien $p \in [1, \infty]$, $\vartheta \in \mathcal{L}^p(\Omega, \lambda_\Omega)$ beschränkt und $\varphi \in \mathcal{L}^p(X, \lambda_X)$.

Bei $f := \vartheta \otimes \varphi$ [mit $\vartheta \otimes \varphi(\omega, x) := \vartheta(\omega) \cdot \varphi(x)$] ist dann

$f \in \mathcal{L}^p(\Omega \times X, \lambda_{\Omega \otimes \lambda_X})$ und für alle $\omega \in \Omega$ gilt:

$$R_K f(\omega, x) = [\varphi * K_\vartheta^*(\omega; \cdot)](x) \quad \text{für f.a. } x \in X.$$

Beweis

Sei $\omega \in \Omega$.

Wegen $\varphi \in \mathcal{L}^p(X, \lambda_X)$ und $K_\vartheta^*(\omega; \cdot) \in M^b(X)$ sind φ und $K_\vartheta^*(\omega; \cdot)$

faltbar und es gilt für f.a. $x \in X$:

$$\begin{aligned}
 [\varphi * K_{\overline{\Omega}}^*(\omega; \cdot)](x) &= \int_X \varphi(x+z) K_{\overline{\Omega}}(\omega; dz) = \\
 &= \int_{\Omega} \int_X \varphi(x+z) \overline{\Omega}(\epsilon) K(\omega, \epsilon; dz) \lambda_{\Omega}(d\epsilon) = \\
 &= \int_{\Omega} \int_X \varphi(z) \overline{\Omega}(\epsilon) K_X(\omega, \epsilon; dz) \lambda_{\Omega}(d\epsilon) = R_K f(\omega, x) .
 \end{aligned}$$

2.3 Bemerkung

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.2 gilt:

Ist $p=1$ oder $p=2$ und gibt es ein $\omega \in \Omega$ mit

$[K_{\overline{\Omega}}(\omega; \cdot)]^{\wedge} \neq 0$ λ_{Γ} -f.ü., so folgt aus der Kenntnis von $R_K f(\omega, \cdot)$ die Kenntnis von φ und damit die von f , falls $\overline{\Omega}$ bekannt ist.

Beweis

Mit Satz 2.2, dem Faltungssatz und der Injektivität der Fouriertransformation; vgl. I.3.10 und I.4.

2.4 Definition und Bemerkung

Sei B_{Ω} eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega, \lambda_{\Omega})$ aus beschränkten Abbildungen $\overline{\Omega}: \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$.

Jede Abbildung $f \in L^2(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X)$ besitzt dann eine Entwicklung der folgenden Form:

$$f = \sum_{\vartheta \in B_Q} \vartheta \otimes P_{\vartheta} f .$$

Hierbei ist $P_{\vartheta} f = \int_{\Omega} f(\omega, \cdot) \overline{\vartheta(\omega)} \lambda_{\Omega}(d\omega) \in L^2(X, \lambda_X)$

eindeutig bestimmt.

Der integrierende Kern K heißt B_Q -orthogonal, falls gilt:

(FH) Für alle $\vartheta \in B_Q$ gibt es ein Maß $\nu_{\vartheta} \in M^b(X)$ mit

$$K_{\vartheta}(\omega, \cdot) = \nu_{\vartheta}(\cdot) \cdot \vartheta(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

2.5 Satz

K sei ein B_Q -orthogonaler integrierender Kern gemäß 2.4

und für alle $\vartheta \in B_Q$ gelte $\hat{\nu}_{\vartheta} \neq 0$ λ_{Γ} -f.ü.

Dann ist R_K auf $L^2(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X)$ injektiv.

Beweis

Sei $f \in L^2(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X)$, also $f = \sum_{\vartheta \in B_Q} \vartheta \otimes P_{\vartheta} f$.

Da K B_Q -orthogonal ist, erhält man aus Satz 2.2 für alle $\omega \in \Omega$:

$$R_K[\vartheta \otimes P_{\vartheta} f](\omega, x) = [P_{\vartheta} f * \nu_{\vartheta}^*](x) \cdot \vartheta(\omega) \quad \text{für } \lambda_X\text{-f.a. } x \in X.$$

Bei $R_K f = 0$ sind wegen der Stetigkeit von R_K alle orthogonalen

Summanden $R_K[\vartheta \otimes P_{\vartheta} f] = 0$, so daß $P_{\vartheta} f * \nu_{\vartheta}^* = 0$ ($\vartheta \in B_Q$) folgt.

Da nach Voraussetzung $\hat{\nu}_{\vartheta} \neq 0$ λ_{Γ} -f.ü. ist, erhält man durch

Anwendung der Fouriertransformation:

$$[P_{\Phi}f]^{\wedge} = 0, \text{ also auch } P_{\Phi}f = 0 \quad [\Phi \in B_Q].$$

Daraus folgt $f = 0$ und somit die Behauptung.

Die in Teil I angegebene Umkehrformel 4.4 läßt sich auch in der vorliegenden Situation anwenden. Man erhält damit

2.6 Umkehrformel

Wie in 2.5 sei K ein B_Q -orthogonaler integrierender Kern und für alle $\Phi \in B_Q$ gelte $\hat{v}_{\Phi} \neq 0$ λ_{Γ} -f.ü.

Weiter sei $f \in L^2(Q \times X, \lambda_Q \otimes \lambda_X)$ derart, daß für alle $\Phi \in B_Q$ gilt:

$P_{\Phi}f \in \mathcal{L}^1(X, \lambda_X) \cap C^b(X)$ erfüllt die Bedingung (B) oder (S) aus I.4.4.

Für alle $\Phi \in B_Q$ ergibt dann die Inversionsformel:

$$P_{\Phi}f(x) = \int_{\Gamma} \langle x, \tau \rangle \frac{[P_{\Phi}(R_K f)]^{\wedge}(\tau)}{\hat{v}_{\Phi}(-\tau)} \lambda_{\Gamma}(d\tau) \quad [\forall x \in X].$$

Beweis

Da K B_Q -orthogonal ist, erhält man analog zum Beweis von 2.5 für alle $\Phi \in B_Q$:

$$\Phi \otimes P_{\Phi}(R_K f) = R_K[\Phi \otimes P_{\Phi}f] = \Phi \otimes [P_{\Phi}f * v_{\Phi}^*].$$

Also gilt $P_{\Phi}(R_K f) = P_{\Phi}f * v_{\Phi}^*$ und die Behauptung folgt aus der Inversionsformel I.4.4.

V. Beispiel: Eine Familie von Radontransformationen auf $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$),

Integration über α -Hyperflächen

Die in Kapitel II vorgestellten Radontransformationen R_α auf $\mathbb{R}^2$ (Integration über α -Kurven) besitzen eine natürliche Verallgemeinerung für den Fall höherer Dimensionen:

Durch Rotation einer (1-dimensionalen) α -Kurve um ihre Symmetrieachse entsteht eine (n-1)-dimensionale α -Hyperfläche.

Die Radontransformierte $R_\alpha f$ einer geeigneten Abbildung

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ ist dann wie in Beispiel II gegeben durch die

Integrale von f über alle α -Hyperflächen. Bei $\alpha=1$ erhält man so die klassische und bei $\alpha=-1$ die sphärische Radontransformation.

Diese Spezialfälle wurden von Cormack und/bzw. Quinto in den Arbeiten [8] und [18] behandelt.

Aus technischen Gründen sei hier $|\alpha| \geq 1/2$ vorausgesetzt.

Damit ist gewährleistet, daß die α -Hyperflächen sich selbst nicht schneiden.

Schließlich gelte in diesem Beispiel stets $n \geq 3$.

V.1 α -Hyperflächen (vgl. II.1)

1.1 Definition

Für $(\omega, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ heißt

$$H_{\alpha}(\omega, t) := \left\{ r \cdot \xi \mid r > 0, \xi \in S^{n-1}, \langle \omega, \xi \rangle \in] \cos(\pi/2\alpha), 1] \right. \\ \left. \text{und } r^{\alpha} \cdot \cos(\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \xi \rangle) = t^{\alpha} \right\}$$

die α -Hyperfläche zum (Auf)punkt $t\omega$.

1.2 Bemerkung

1) Die α -Hyperflächen sind rotationssymmetrisch zur Achse $\mathbb{R} \cdot \omega$.

2) Bei $\alpha > 0$ strebt $H_{\alpha}(\omega, t)$ gegen ∞ für $\langle \omega, \xi \rangle \rightarrow \cos(\pi/2\alpha)$,
bei $\alpha < 0$ dagegen gegen 0.

3) Die α -Hyperflächen schneiden sich selbst nicht, da $|\alpha| \geq 1/2$.

4) Bei $\xi \in S^{n-1}$ mit $\langle \omega, \xi \rangle = 0$ gilt:

Der Schnitt von $H_{\alpha}(\omega, t)$ mit der Ebene $\mathbb{R} \cdot \omega + \mathbb{R} \cdot \xi$ ist eine α -Kurve.

5) Spezialfälle (mit geometrischer Bezeichnung für $\mathbb{R}^3$)

$\alpha = -1$: $H_{\alpha}(\omega, t) = S(t\omega)$ ist die Kugel durch 0 und $t\omega$.

$\alpha = 1/2$: $H_{\alpha}(\omega, t)$ ist ein (Rotations)Paraboloid.

$\alpha = 1$: $H_{\alpha}(\omega, t) = H(\omega, t)$ ist die Ebene zum Aufpunkt $t\omega$.

$\alpha = 2$: $H_{\alpha}(\omega, t)$ ist eine Hyperboloid(schale).

6) Unter der Inversion $j : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$x \longmapsto j(x) := \|x\|^{-2} \cdot x$$

gilt $j[H_\alpha(\omega, t)] = H_{-\alpha}(\omega, 1/t)$.

7) Für festes $x = r\omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$\{t\epsilon \mid t > 0, \epsilon \in S^{n-1}, x \in H_\alpha(\epsilon, t)\} = H_{-\alpha}(\omega, r), \text{ d.h.}$$

die Menge der Aufpunkte aller α -Hyperflächen durch x ist gerade die $(-\alpha)$ -Hyperfläche zum Aufpunkt x .

1.3 Die Integration über α -Hyperflächen

Bei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ ist das Oberflächenintegral von f über

$H_\alpha(\omega, t)$ - sofern existent - gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_{H_\alpha(\omega, t)} f(x) \lambda_{H_\alpha}(dx) &= \\ &= t^{n-1} \cdot \int_{S^{n-1}} f[t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\alpha \cdot \arccos\langle \omega, \epsilon \rangle) \cdot \epsilon] \cdot \chi_{[\cos(\pi/2\alpha), 1]}(\langle \omega, \epsilon \rangle) \cdot \\ &\quad \cdot \cos^{\frac{1-n}{\alpha}} - 1[\alpha \cdot \arccos\langle \omega, \epsilon \rangle] \lambda_Q(d\epsilon) \end{aligned}$$

Hierbei ist λ_Q das Oberflächenmaß auf S^{n-1} .

Beweis

Sei $(\omega, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$.

1) Bei $S_\omega := \{\tau \in S^{n-1} \mid \langle \omega, \tau \rangle = 0\}$ läßt sich S^{n-1}

wie folgt parametrisieren:

$$S_\omega \times]0, \pi[\longrightarrow S^{n-1} \setminus \{\omega, -\omega\}$$

$$(\tau, \varphi) \longmapsto \cos(\varphi) \cdot \omega + \sin(\varphi) \cdot \tau$$

Und es gilt $d\lambda_\Omega = \sin^{n-2}(\varphi) d\lambda_\Omega d\varphi$, wobei λ_Ω das
Oberflächenmaß auf S_ω ist.

2) Da $H_\alpha(\omega, t)$ aus einer α -Kurve K_α durch Rotation um $\mathbb{R} \cdot \omega$
entsteht, ist das Oberflächenintegral von f über $H_\alpha(\omega, t)$
gegeben durch (vgl. II.1.3):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\pi}{2|\alpha|} \int_0^\pi \int_{S_\omega} f \left[\frac{t}{\cos^{1/\alpha}(\alpha\varphi)} [\cos(\varphi) \cdot \omega + \sin(\varphi) \cdot \tau] \right] \cdot \left[\frac{t \cdot \sin(\varphi)}{\cos^{1/\alpha}(\alpha\varphi)} \right]^{n-2} \cdot \\
 & \quad \cdot \lambda_\Omega(d\tau) \frac{t}{\cos^{1+1/\alpha}(\alpha\varphi)} d\varphi = \\
 & = \int_0^\pi \int_{S_\omega} f \left[\frac{t}{\cos^{1/\alpha}(\alpha\varphi)} [\cos(\varphi) \cdot \omega + \sin(\varphi) \cdot \tau] \right] \cdot \chi_{[0, \pi/2|\alpha|]}(\varphi) \cdot \\
 & \quad \cdot t^{n-1} \cdot \cos^{\frac{1-n}{\alpha}}(\alpha\varphi) \cdot \sin^{n-2}(\varphi) \lambda_\Omega(d\tau) d\varphi = \\
 & = \int_{S^{n-1}} f[t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\alpha \cdot \arccos\langle \omega, \xi \rangle) \cdot \xi] \cdot \chi_{[0, \pi/2|\alpha|]}(\arccos\langle \omega, \xi \rangle) \cdot \\
 & \quad \cdot t^{n-1} \cdot \cos^{\frac{1-n}{\alpha}-1}(\alpha \cdot \arccos\langle \omega, \xi \rangle) \lambda_\Omega(d\xi) = \\
 & = t^{n-1} \cdot \int_{S^{n-1}} f[t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\alpha \cdot \arccos\langle \omega, \xi \rangle) \cdot \xi] \chi_{[\cos(\pi/2\alpha), 1]}(\langle \omega, \xi \rangle) \cdot \\
 & \quad \cdot \cos^{\frac{1-n}{\alpha}-1}(\alpha \cdot \arccos\langle \omega, \xi \rangle) \lambda_\Omega(d\xi) .
 \end{aligned}$$

V.2 Die Radontransformationen R_α und ihre Eigenschaften

Dieser Abschnitt befaßt sich mit der Definition der R_α -Transformationen und der Erläuterung der Ergebnisse, die man durch Anwendung der Theorie der gemischten Faltung aus Kapitel IV erhält.

2.1 Definition

Sei $x = t \cdot \omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $(\omega, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$.

Für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ seien - sofern existent -

$R_\alpha f(\omega, t) := \tilde{R}_\alpha f(t\omega)$ definiert als das Oberflächenintegral von f über die Hyperfläche $H_\alpha(\omega, t)$, also

$$\begin{aligned} R_\alpha f(\omega, t) &= \tilde{R}_\alpha f(t\omega) = \\ &= \int_{H_\alpha(\omega, t)} f(y) \lambda_{H_\alpha}(dy) . \end{aligned}$$

Existiert $R_\alpha(\omega, t)$ für f.a. $(\omega, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$, d.h.

$\tilde{R}_\alpha f(x)$ für f.a. $x \in \mathbb{R}^n$, so heißen $R_\alpha f$ bzw. $\tilde{R}_\alpha f$

die α -Radontransformierte von f .

2.2 Bemerkung

Als Spezialfälle erhält man für $\alpha = 1$ die klassische und für $\alpha = -1$ - bis auf Normierung des integrierenden Maßes - die sphärische Radontransformation.

Es folgen nun die Resultate für die R_α -Transformationen.

Sie entsprechen hinsichtlich Integrierbarkeit, Definitionsbereich, Bildraum und Stetigkeit genau den Ergebnissen von Beispiel II.

2.3 Ergebnisse

Seien $p \in [1, \infty[$, $|\alpha| \geq 1/2$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Teil I : Integrierbarkeit

(EI.1) Bei $\varepsilon < (n-1)p-n$ oder $\varepsilon = (n-1)p-n - 1$ für $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon > (n-1)p-n$ oder $\varepsilon = (n-1)p-n - 1$ für $\alpha < 0$ gibt es eine Abbildung $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx)$, die über keine α -Hyperfläche $H_\alpha(\omega, t)$ ($(\omega, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$) integrierbar ist.

(EI.2) Bei $\varepsilon > (n-1)p-n$ für $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon < (n-1)p-n$ für $\alpha < 0$ gilt für jede Abbildung $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx)$:
Für f.a. $(\omega, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ existiert
$$\tilde{R}_\alpha f(t\omega) = R_\alpha f(\omega, t) .$$

Teil II : Definitionsbereich, Bildraum und Stetigkeit

(EII.1) Bei $\varepsilon > (n-1)p-n$ für $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon < (n-1)p-n$ für $\alpha < 0$ (wie in (EI.2)) sind die Abbildungen

$$\tilde{R}_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^{\varepsilon-(n-1)p} dx)$$

bzw.

$$R_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx) \longrightarrow L^p(S^{n-1} \times \mathbb{R}^+, \lambda_{\Omega^{\otimes}}(r^{\varepsilon-(n-1)(p-1)} dr))$$

wohldefiniert, linear und stetig.

(EII.2) Bei $\varepsilon \leq (n-1)p-n$ für $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon \geq (n-1)p-n$ für $\alpha < 0$ gibt es eine über alle $H_\alpha(\omega, t)$

integrierbare Abbildung $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx)$ mit

$$\tilde{R}_\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^{\varepsilon-(n-1)p} dx) \quad \text{und}$$

$$R_\alpha f \in L^p(S^{n-1} \times \mathbb{R}^+, \lambda_{\Omega^{\otimes}}(r^{\varepsilon-(n-1)(p-1)} dr)) \quad .$$

Teil III : Injektivität

(EIII.1) Die Radontransformationen $\tilde{R}_\alpha$ und R_α gemäß (EII.1) sind für $p = 2$ zusätzlich injektiv.

Eine Umkehrformel ist in Abschnitt V.5 beschrieben.

Teil IV : Der Zusammenhang zwischen R_α und $R_{-\alpha}$

Für $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ sei

$$I_\gamma f(x) := \begin{cases} \|x\|^{-\gamma} \cdot f(x/\|x\|^2) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt:

(EIV.1) Für $x \neq 0$ ist $I_{\tilde{R}}(I_{\tilde{R}}f)(x) = f(x)$ und

für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt

$$I_{\tilde{R}} : L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^{p-2n-\varepsilon} dx)$$

ist ein Normisomorphismus.

(EIV.2) Ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ meßbar, so gilt für alle

$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\tilde{R}_\alpha f(x) = \int_{H_\alpha(x/\|x\|, \|x\|)} f(y) \lambda_{H_\alpha}(dy) = \int_{H_{-\alpha}(x/\|x\|, 1/\|x\|)} I_{2n-2}f(y) \lambda_{H_{-\alpha}}(dy) =$$

$$= I_0 \left[\tilde{R}_{-\alpha}(I_{2n-2}f) \right](x) = \tilde{R}_{-\alpha} \left[I_{2n-2}f \right](x/\|x\|^2) ,$$

sofern eines der beiden Integrale existiert.

Im Hinblick auf (EI.2) und (EII.1) beachte man,

daß gilt:

$$\varepsilon \geq (n-1)p-n \iff \left[(2n-2)p-2n-\varepsilon \right] \leq (n-1)p-n .$$

2.4 Bemerkung

Teil I und II der Ergebnisse beschreiben eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Betrachtung der R_α -Transformationen auf L^p -Räumen. Von besonderem Interesse sind hierbei die Fälle, bei denen in Definitionsbereich und Bildraum - oder zumindest in einem der beiden Räume - tatsächlich keine Gewichtsfunktionen auftreten.

- 1) Nach (EI.1) und (EI.2) gilt für $\alpha > 0$ (bzw. $\alpha < 0$) :

Alle Abbildungen aus $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, dx)$ sind genau dann über f.a. α -Hyperflächen integrierbar, wenn $p < n/(n-1)$ (bzw. $p > n/(n-1)$) gilt.

Damit erhält man für alle α -Hyperflächen ($|\alpha| \geq 1/2$) eine Aussage, die im Zusammenhang mit der klassischen Radontransformation für Hyperebenen allgemein bekannt ist. Siehe z.B. Cor.1 in Oberlin [15].

- 2) Ohne Gewichtsfunktionen im Definitionsbereich lassen sich die R_α -Transformationen also für $p < n/(n-1)$ bei $\alpha > 0$ bzw. $p > n/(n-1)$ bei $\alpha < 0$ definieren.

Im Bildraum führt die - nur für $\alpha > 0$ mögliche - Wahl $\varepsilon = (n-1)p$ für $\tilde{R}_\alpha$ bzw. $\varepsilon = (n-1)(p-1)$ für R_α zum Wegfall der Gewichtsfunktionen.

Mit $\alpha=1$, $p=2$ und $\varepsilon=n-1$ erhält man beispielsweise einen Spezialfall für die klassische Radontransformation, der in der Arbeit [18] von Quinto behandelt wird.

- 3) Für die Transformationen $\tilde{R}_\alpha$ tritt in Definitionsbereich oder Bildraum immer eine Gewichtsfunktion auf, da $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon - (n-1)p = 0$ nicht gleichzeitig gelten kann.

Dagegen ergibt die Wahl $0 = \varepsilon = (n-1)(p-1)$, die $p = 1$ und nach (EII.1) $\alpha > 0$ impliziert, den Fall

$$R_\alpha : L^1(\mathbb{R}^n, dx) \longrightarrow L^1(S^{n-1} \times \mathbb{R}^+, \lambda_Q \otimes \lambda) \text{ ohne Gewichtsfunktion.}$$

Für die klassische Radontransformation ist diese Aussage wiederum lange bekannt und mit dem Satz von Fubini auch unmittelbar zu beweisen.

- 4) Bei $\alpha < 0$ besitzen die α -Hyperflächen endliches Maß.

Daher lassen sich die R_α -Transformationen durch Normierung der integrierenden Maße zu Transformationen M_α modifizieren, wie dies z.B. bei der sphärischen Radontransformation der Fall ist.

Man erhält die Beziehung $\tilde{R}_\alpha f(x) = \omega_\alpha \cdot \|x\|^{n-1} \cdot M_\alpha f(x)$, wobei ω_α das Maß der α -Hyperfläche $H_\alpha(e_1, 1)$ bedeutet.

Und aus (EII.1) folgt für $\alpha \leq -1/2$ und $\varepsilon < (n-1)p-n$:

$M_\alpha : L^P(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx) \longrightarrow L^P(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx)$ ist wohldefiniert, linear und stetig.

Ein Spezialfall dieser Aussage für die sphärische Radontransformation ($\varepsilon = 0$, $p = 2$) wird ebenfalls in Quinto [18] untersucht.

- 5) Schließlich sei noch angemerkt, daß alle Aussagen in 2.3 und 2.4 tatsächlich für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten, auch wenn die Beweise hier nur für $|\alpha| \geq 1/2$ geführt werden. Die Beweise für $|\alpha| < 1/2$ unterscheiden sich von denen für $|\alpha| \geq 1/2$ lediglich in der komplizierteren Darstellung der α -Hyperflächen und deren Auswirkungen in der Definition der R_α -Transformationen.

V.3 Darstellung der R_α -Transformationen als gemischte

Faltungsooperatoren

3.1 Definition

Sei $|\alpha| \geq 1/2$.

1) Für $\gamma \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ sei

$$T_\gamma f(x) := \begin{cases} \|x\|^{-\gamma} f(x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

2) Es gelte folgende Konvention:

Ist $\alpha > 0$, so sei stets $\gamma \in]-\infty, 1-n[$,

bei $\alpha < 0$ sei stets $\gamma \in]1-n, \infty[$.

3) Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\omega \in S^{n-1}$ sei

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha(\omega; B) &:= \int_{S^{n-1}} \chi_B \left[\cos^{-1/\alpha}(\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \xi \rangle) \cdot \xi \right] \cdot \chi_{[\cos(\pi/2\alpha), 1]}(\langle \omega, \xi \rangle) \cdot \\ &\quad \cdot \cos^{\frac{1-n}{\alpha} - 1} [\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \xi \rangle] \lambda_Q(d\xi) \quad , \quad \text{d.h.} \end{aligned}$$

$\lambda_\alpha(\omega; \cdot)$ ist das auf $H_\alpha(\omega, 1)$ konzentrierte Oberflächenmaß.

4) Weiter sei für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\omega \in S^{n-1}$

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\gamma}(\omega; B) &:= \int_B \|x\|^\gamma \lambda_\alpha(\omega; dx) = \\ &= \int_{S^{n-1}} \chi_B \left[\cos^{-1/\alpha}(\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \xi \rangle) \cdot \xi \right] \cdot \chi_{[\cos(\pi/2\alpha), 1]}(\langle \omega, \xi \rangle) \cdot \\ &\quad \cdot \cos^{-\frac{\gamma+n-1}{\alpha} - 1} [\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \xi \rangle] \lambda_Q(d\xi) \quad . \end{aligned}$$

5) Für $t \in \mathbb{R}^+$ sei

$$\tau_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \tau_t(x) := t \cdot x$$

die Streckung um den Faktor t .

3.2 Bemerkung

Sei $(\omega, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$.

Unter Beachtung der Konvention 3.1 2) gilt dann

$$\lambda_{\alpha\tau}(\omega; \cdot) \in M^{b+}(\mathbb{R}^n).$$

Weiter erhält man $H_\alpha(\omega, t) = \tau_t(H_\alpha(\omega, 1))$ und für eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ gilt, sofern $R_\alpha f(\omega, t)$ oder das rechte Integral existieren:

$$\tilde{R}_{\alpha\tau} f(t\omega) = R_\alpha f(\omega, t) = t^{\tau+n-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} T_\tau f[\tau_t(x)] \lambda_{\alpha\tau}(\omega; dx)$$

Beweis

Offensichtlich ist $\lambda_{\alpha\tau}(\omega; \cdot) \in M^+(\mathbb{R}^n)$ und

$$\lambda_{\alpha\tau}(\omega; \mathbb{R}^n) = \int_{S^{n-1}} \cos^{-\frac{\tau+n-1}{\alpha}-1} [\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \varepsilon \rangle] \cdot \chi_{[\cos(\pi/2\alpha), 1]}(\langle \omega, \varepsilon \rangle) \lambda_\Omega(d\varepsilon) \stackrel{(\text{vgl. 1.3})}{=} \\ \frac{\pi}{2|\alpha|} \int_0^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} \int_{S_\omega} \cos^{-\frac{\tau+n-1}{\alpha}-1}(\alpha\varphi) \sin^{n-2}(\varphi) \lambda_{Q_\omega}(d\tau) d\varphi \leq$$

$$\begin{aligned}
 &= \omega_{n-1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2|\alpha|}} \cos^{-\frac{\gamma+n-1}{\alpha}} - 1 \cdot (|\alpha|\varphi) \, d\varphi = \\
 &= \frac{\omega_{n-1}}{|\alpha|} \cdot \int_0^1 r^{-1-(\gamma+n-1)/\alpha} \cdot [1-r^2]^{-1/2} \, dr < \infty,
 \end{aligned}$$

da $-(\gamma+n-1)/\alpha > 0$ nach 3.1 2).

Also gilt $\lambda_{\alpha\gamma}(\omega; \cdot) \in M^{b+}(\mathbb{R}^n)$.

$H_\alpha(\omega, t) = \tau_t(H_\alpha(\omega, 1))$ ist klar.

Und schließlich erhält man noch

$$\begin{aligned}
 R_\alpha(\omega, t) &= t^{n-1} \cdot \int_{S^{n-1}} f[t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\alpha \cdot \arccos\langle \omega, \xi \rangle) \cdot \xi] \cdot \\
 &\quad \cdot \chi_{[\cos(\pi/2\alpha), 1]}(\langle \omega, \xi \rangle) \cdot \cos^{\frac{1-n}{\alpha} - 1}(\alpha \cdot \arccos\langle \omega, \xi \rangle) \, \lambda_Q(d\xi) = \\
 &= t^{n-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f \circ \tau_t(x) \, \lambda_\alpha(\omega; dx) = \\
 &= t^{n-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f \circ \tau_t(x) \, \|x\|^{-\gamma} \|x\|^\gamma \, \lambda_\alpha(\omega; dx) = \\
 &= t^{n-1} \cdot t^\gamma \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f \circ \tau_t(x) \, \|\tau_t(x)\|^{-\gamma} \, \lambda_{\alpha\gamma}(\omega; dx) = \\
 &= t^{\gamma+n-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} T_\gamma f[\tau_t(x)] \, \lambda_{\alpha\gamma}(\omega; dx).
 \end{aligned}$$

3.3 Definition und Bemerkung

Seien $|\alpha| \geq 1/2$ und τ gemäß 3.1 2) .

Setze $X = \mathbb{R}$ mit $\lambda_X = \lambda_{\mathbb{R}}$ und $\Omega = S^{n-1}$ mit Oberflächenmaß λ_{Ω} .

Dann ist $\Omega \times X = S^{n-1} \times \mathbb{R}$ isomorph zu $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vermöge der Abbildung

$$p : S^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} , \quad (\omega, r) \longmapsto p(\omega, r) := e^r \cdot \omega ,$$

Weiter sei $\pi := p^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R}$ mit

$$\pi(y) = (y/\|y\|, \ln\|y\|) .$$

Schließlich sei noch

$$K_{\alpha\tau} : S^{n-1} \times S^{n-1} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad \text{mit}$$

$$K_{\alpha\tau}(\omega, \varepsilon; \cdot) := \chi_{[\cos(\pi/2\alpha), 1]}(\langle \omega, \varepsilon \rangle) \cdot$$

$$\cdot \cos^{-\frac{\tau+n-1}{\alpha}-1} [\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \varepsilon \rangle] \cdot \delta_{\ln[\cos^{-1/\alpha}(\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \varepsilon \rangle)]}$$

für alle $\omega, \varepsilon \in S^{n-1}$.

Dann gilt für alle $\omega \in S^{n-1}$

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} K_{\alpha\tau}(\varepsilon, \omega; \mathbb{R}) \lambda_{\Omega}(d\varepsilon) &= \int_{S^{n-1}} K_{\alpha\tau}(\omega, \varepsilon; \mathbb{R}) \lambda_{\Omega}(d\varepsilon) = \\ &= \lambda_{\alpha\tau}(\omega; \mathbb{R}^n) =: C_K < \infty . \end{aligned}$$

$K_{\alpha\tau}$ ist also ein integrierender Kern.

Nach Satz IV.1.3 ist somit für alle $p \in [1, \infty]$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\gamma} : L^p(S^{n-1} \times \mathbb{R}, \lambda_Q \otimes \lambda_{\mathbb{R}}) &\longrightarrow L^p(S^{n-1} \times \mathbb{R}, \lambda_Q \otimes \lambda_{\mathbb{R}}) \\ f &\longmapsto R_{\alpha\gamma} f \end{aligned}$$

mit

$$R_{\alpha\gamma} f(\omega, t) := \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi, r+t) K_{\alpha\gamma}(\omega, \xi; dr) \lambda_Q(d\xi)$$

eine stetige lineare Abbildung mit $\|R_{\alpha\gamma}\| \leq C_K$.

$R_{\alpha\gamma}$ stellt die Beschreibung der R_α -Transformationen als gemischte Faltungsoperatoren dar. Der genaue Zusammenhang wird in Lemma 3.5 formuliert.

Lemma 3.4

Sei $p \in [1, \infty]$. Für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ gilt dann:

$$1) \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^{-n} dx) \iff f \circ P \in L^p(S^{n-1} \times \mathbb{R}, \lambda_Q \otimes \lambda_{\mathbb{R}})$$

und in diesem Fall erhält man

$$\|f\|_{p, \|x\|^{-n}} = (2\pi)^{1/2p} \cdot \|f \circ P\|_p.$$

2) Bei $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt weiter

$$f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^{-\gamma p - n} dx) \iff T_\gamma f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^{-n} dx)$$

und in diesem Fall erhält man

$$\|f\|_{p, \|x\|^{-\gamma p - n}} = \|T_\gamma f\|_{p, \|x\|^{-n}}.$$

Beweis

1) Die Aussage in 1) folgt aus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \|x\|^{-n} dx &= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty |f(r\omega)|^p r^{-n} r^{n-1} dr \lambda_Q(d\omega) = \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |f(e^s \omega)|^p ds \lambda_Q(d\omega) = \\ &= (2\pi)^{1/2} \cdot \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |f \circ P(\omega, s)|^p \lambda_{\mathbb{R}}(ds) \lambda_Q(d\omega) . \end{aligned}$$

2) Aussage 2) folgt aus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \|x\|^{-\tau p - n} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \|x\|^{-\tau} |f(x)|^p \|x\|^{-n} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |T_\tau f(x)|^p \|x\|^{-n} dx \end{aligned}$$

Lemma 3.5

Bei $|\alpha| \geq 1/2$ und τ gemäß 3.1 2) gilt für alle

$p \in [1, \infty[$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^{-\tau p - n} dx)$:

$$\begin{aligned} \left[T_{\tau+n-1}(\tilde{R}_\alpha f) \right] \circ P &= R_{\alpha\tau} \left[(T_\tau f) \circ P \right] \\ &\text{in } L^p(S^{n-1} \times \mathbb{R}, \lambda_Q \otimes \lambda_{\mathbb{R}}) . \end{aligned}$$

Beweis

Seien $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^{-\tau p - n} dx)$

Nach Lemma 3.4 ist dann $(T_{\mathfrak{F}}f) \circ P \in L^P[S^{n-1} \times \mathbb{R}, \lambda_Q \otimes \lambda_{\mathbb{R}}]$.

Gemäß Bemerkung 3.3 gilt also

$$R_{\alpha \mathfrak{F}}[(T_{\mathfrak{F}}f) \circ P] \in L^P[S^{n-1} \times \mathbb{R}, \lambda_Q \otimes \lambda_{\mathbb{R}}]$$

und für f.a. $(\omega, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$ erhält man

$$R_{\alpha \mathfrak{F}}[(T_{\mathfrak{F}}f) \circ P](\omega, t) =$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} (T_{\mathfrak{F}}f) \circ P(\xi, \xi+t) K_{\alpha \mathfrak{F}}(\omega, \xi; d\xi) \lambda_Q(d\xi) =$$

$$= \int_{S^{n-1}} (T_{\mathfrak{F}}f) \circ P \left[\xi, \ln \left[\cos^{-1/\alpha}(\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \xi \rangle) \right] + t \right] \cdot$$

$$\cdot \chi_{] \cos(\pi/2\alpha), 1[}(\langle \omega, \xi \rangle) \cdot \cos^{-\frac{\mathfrak{F}+n-1}{\alpha}} - 1 [\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \xi \rangle] \lambda_Q(d\xi) =$$

$$= \int_{S^{n-1}} T_{\mathfrak{F}}f \left(e^t \cdot \cos^{-1/\alpha}(\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \xi \rangle) \cdot \xi \right) \cdot \chi_{] \cos(\pi/2\alpha), 1[}(\langle \omega, \xi \rangle) \cdot$$

$$\cdot \cos^{-\frac{\mathfrak{F}+n-1}{\alpha}} - 1 [\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \xi \rangle] \lambda_Q(d\xi) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} [T_{\mathfrak{F}}f] \circ \tau_{e^t} (x) \lambda_{\alpha \mathfrak{F}}(\omega; dx) \quad (\text{mit 3.2}) =$$

$$= (e^t)^{-(\mathfrak{F}+n-1)} \cdot \tilde{R}_{\alpha f}[e^t, \omega] = T_{\mathfrak{F}+n-1}[\tilde{R}_{\alpha f}](e^t, \omega) =$$

$$= [T_{\mathfrak{F}+n-1}(\tilde{R}_{\alpha f})] [P(\omega, t)] .$$

3.6 Beweis von (EI.2) und (EII.1)

Seien $p \in [1, \infty[$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx)$, wobei

$\varepsilon > (n-1)p-n$ bei $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon < (n-1)p-n$ bei $\alpha < 0$

gelte.

Setze $\gamma := -(\varepsilon+n)/p$, so daß γ gerade die Konvention 3.1 2) erfüllt.

Es folgt $\varepsilon = -\gamma p - n$, so daß nach Lemma 3.5 gilt

$$[T_{\gamma+n-1}(\tilde{R}_\alpha f)] \circ P \in L^p(S^{n-1} \times \mathbb{R}, \lambda_Q \otimes \lambda_\mathbb{R}).$$

Mit Lemma 3.4 folgt nun

$$\tilde{R}_\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^{-(\gamma+n-1)p-n} dx) = L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^{\varepsilon-(n-1)p} dx).$$

Damit ist (EI.2) bereits bewiesen.

(EII.1) erhält man aus der folgenden Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \left[\int_{S^{n-1}} \int_0^\infty |R_\alpha f(\omega, t)|^p r^{\varepsilon-(n-1)(p-1)} dr \lambda_Q(d\omega) \right]^{1/p} = \\ & = \| \tilde{R}_\alpha f \|_{p, \|x\|^{\varepsilon-(n-1)p}} \stackrel{(3.4)}{=} \| T_{\gamma+n-1}(\tilde{R}_\alpha f) \|_{p, \|x\|^{-n}} \stackrel{(3.4)}{=} \\ & = (2\pi)^{1/2p} \| [T_{\gamma+n-1}(\tilde{R}_\alpha f)] \circ P \|_p \stackrel{(3.5)}{=} (2\pi)^{1/2p} \| R_{\alpha\gamma}((T_\gamma f) \circ P) \|_p \stackrel{(3.3)}{\leq} \\ & \leq (2\pi)^{1/2p} \cdot C_K \cdot \| (T_\gamma f) \circ P \|_p \stackrel{(3.4)}{=} C_K \cdot \| T_\gamma f \|_{p, \|x\|^{-n}} = \\ & = C_K \cdot \| f \|_{p, \|x\|^{-\gamma p - n}} = C_K \cdot \| f \|_{p, \|x\|^\varepsilon} \end{aligned}$$

3.7 Beweis von (EI.1)

Sei $p \in [1, \infty[$.

- 1) Bei $\alpha > 0$ und $\varepsilon < (n-1)p-n$ bzw. $\alpha < 0$ und $\varepsilon > (n-1)p-n$ setze $I := [1, \infty[$ bzw. $I :=]0, 1]$.

Für $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \|x\|^{1-n} & \text{falls } \|x\| \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zeigt man leicht $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx)$.

Analog zum Beweis von II.3.7 1) erhält man weiter, daß f bei beliebigem $(\omega, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ über die α -Hyperfläche $H_\alpha(\omega, t)$ nicht integrierbar ist.

- 2) Bei $\varepsilon = (n-1)p-n > -1$ setze $I := [2, \infty[$ falls $\alpha > 0$ und $I :=]0, 1/2]$ falls $\alpha < 0$.

Für die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \|x\|^{1-n} / \ln \|x\| & \text{falls } \|x\| \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt dann $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx)$.

Und analog zum Beweis von II.3.7 2) zeigt man, daß f über keine α -Hyperfläche integrierbar ist.

- 3) Aus 1) und 2) zusammen erhält man (EI.1).

3.8 Beweis von (EII.2)

Sei $\varepsilon \leq (n-1)p-n$ für $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon \geq (n-1)p-n$ für $\alpha < 0$.

Bei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f := \chi_{\{1 < \|x\| < 2\}}$

gilt offensichtlich $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx)$.

Andererseits erhält man für beliebige $\omega \in S^{n-1}$ und

$0 < t \leq 1$ bei $\alpha > 0$ bzw. $2 \leq t$ bei $\alpha < 0$:

$R_\alpha f(\omega, t) \geq c_\alpha$ für eine geeignete Konstante $c_\alpha > 0$.

Damit folgt nun unter Beachtung der Wahl von ε

$$\tilde{R}_\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^{\varepsilon-(n-1)p} dx) \quad \text{und}$$

$$R_\alpha f \in L^p(S^{n-1} \times \mathbb{R}^+, \lambda_{Q^0}(r^{\varepsilon-(n-1)(p-1)} dr)) .$$

V.4 Kugelfunktionen und das Funk-Hecke-Theorem

4.1 Bemerkung

Zu $L^2(S^{n-1}, \lambda_Q)$ existiert eine Orthonormalbasis B_Q aus Kugelfunktionen $Y_{lm}: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ($l \in \mathbb{N}_0$, $m \in M_l = \{1, 2, \dots, m_l\}$), für die gilt $Y_{lm} \in SH_l$, d.h.

Y_{lm} ist die Restriktion eines Polynoms $P_{lm}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad l , das harmonisch und homogen vom Grad l ist.

Nähere Informationen findet man in Seeley [22]. Dort wird auch der folgende Satz bewiesen.

4.2 Funk-Hecke-Theorem

Seien $F: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ eine Abbildung,

$\lambda := (n-2)/2$, $l \in \mathbb{N}_0$ und $Y_l \in SH_l$.

Bei $F \in \mathcal{L}^1([-1, 1], (1-t^2)^{\lambda-1/2} dt)$ gilt dann für alle $\omega \in S^{n-1}$

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} F(\langle \omega, \xi \rangle) Y_l(\xi) \lambda_Q(d\xi) &= \\ &= \frac{\omega_{n-1}}{C_l^\lambda(1)} \int_{-1}^1 F(t) C_l^\lambda(t) [1-t^2]^{\lambda-1/2} dt \cdot Y_l(\omega) \end{aligned}$$

C_l^λ ist hierbei das Gegenbauer-Polynom gemäß der folgenden Anmerkung:

Die im Funk-Hecke-Theorem auftretenden Gegenbauer-Polynome $\{C_l^\lambda \mid l \in \mathbb{N}_0\}$ sind bezüglich der Gewichtsfunktion $(1-t^2)^{\lambda-1/2}$ auf $[-1, 1]$ orthogonale Polynome.

Sie besitzen u.a. folgende Eigenschaften:

Der Grad von C_λ^λ ist λ , $C_\lambda^\lambda(-t) = (-1)^\lambda C_\lambda^\lambda(t)$ und

$$|C_\lambda^\lambda(t)| \leq C_\lambda^\lambda(1) \quad \text{für alle } t \in [-1, 1].$$

Zur weiteren Information siehe Erdelyi [11].

4.3 Satz

Für $Y_{\lambda m} \in B_\Omega$ sei $K_{\alpha\tau}^{\lambda m}(\omega; \cdot) := \int_{S^{n-1}} Y_{\lambda m}(\xi) K_{\alpha\tau}(\omega, \xi; \cdot) \lambda_\Omega(d\xi)$

($\omega \in S^{n-1}$).

Dann gilt:

$$(FH) \quad K_{\alpha\tau}^{\lambda m}(\omega; \cdot) = Y_{\lambda m}(\omega) \cdot v_{\alpha\tau}^{\lambda} \quad (\omega \in S^{n-1}).$$

Hierbei ist $v_{\alpha\tau}^{\lambda} \in M^b(\mathbb{R})$ und besitzt bezüglich des eindimensionalen Lebesgue-Maßes die Dichte $g_{\alpha\tau}^{\lambda}$ mit

$$g_{\alpha\tau}^{\lambda}(t) = \frac{\omega_{n-1}}{C_\lambda^\lambda(1)} \cdot e^{(\tau+n-1)t} \cdot C_\lambda^\lambda[\cos(\alpha^{-1} \arccos(e^{-\alpha t}))] \cdot$$

$$\cdot \sin^{2\lambda}[\alpha^{-1} \arccos(e^{-\alpha t})] \cdot [1 - e^{-2\alpha t}]^{-1/2} \cdot \chi_I(t),$$

wobei $I =] 0, \infty [$ bei $\alpha > 0$ bzw. $I =] -\infty, 0 [$

bei $\alpha < 0$ gilt.

Der Kern $K_{\alpha\tau}$ ist also B_Ω -orthogonal.

Beweis

1) Für alle $\omega \in S^{n-1}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$K_{\alpha\tau}^{\lambda m}(\omega; B) = \int_{S^{n-1}} \cos \frac{\tau+n-1}{\alpha} \alpha^{-1} [\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \xi \rangle] \cdot \chi_{] \cos(\pi/2\alpha), 1 [}(\langle \omega, \xi \rangle) \cdot$$

$$\cdot \chi_B[-1/\alpha \cdot \ln[\cos(\alpha \cdot \arccos \langle \omega, \xi \rangle)]] \cdot Y_{\lambda m}(\xi) \lambda_\Omega(d\xi) =$$

$$= \int_{S^{n-1}} F(\langle \omega, \theta \rangle) \cdot Y_{lm}(\theta) \lambda_{\Omega}(d\theta)$$

bei $F : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(t) := \cos^{-\frac{\gamma+n-1}{\alpha}-1} \left[\alpha \cdot \arccos(t) \right] \cdot \chi_{\left] \cos(\pi/2\alpha), 1 \right[}(t) \cdot \\ \cdot \chi_B \left[-1/\alpha \cdot \ln \left[\cos(\alpha \cdot \arccos(t)) \right] \right] ,$$

2) $F \in \mathcal{L}^1[-1, 1], (1-t^2)^{\lambda-1/2}$, denn

$$\int_{-1}^1 |F(t)| (1-t^2)^{\lambda-1/2} dt \leq \int_{\cos(\pi/2\alpha)}^1 \cos^{-\frac{\gamma+n-1}{\alpha}-1} \left[\alpha \cdot \arccos(t) \right] dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\alpha|} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[\cos(\psi) \right]^{-\frac{\gamma+n-1}{\alpha}-1} d\psi =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \cdot \int_0^1 t^{-\frac{\gamma+n-1}{\alpha}-1} \cdot (1-t^2)^{-1/2} dt < \infty ,$$

$$\text{da } -\frac{\gamma+n-1}{\alpha} > 0 \text{ gilt.}$$

3) Mit 1) und 2) erhält man aus dem Funk-Hecke-Theorem

$$K_{\alpha\gamma}^{lm}(\omega; B) = \frac{\omega_{n-1}}{C_{\lambda}^{\lambda}(1)} \cdot \int_{-1}^1 F(t) C_{\lambda}^{\lambda}(t) (1-t^2)^{\lambda-1/2} dt \cdot Y_{lm}(\omega) .$$

Daher gilt mit der Substitution $\psi = |\alpha| \cdot \arccos(t)$

$$v_{\alpha\gamma}^{lm}(B) = \frac{\omega_{n-1}}{C_{\lambda}^{\lambda}(1)} \cdot \frac{1}{|\alpha|} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[\cos \psi \right]^{-\frac{\gamma+n-1}{\alpha}-1} \cdot \chi_B \left[-1/\alpha \ln(\cos \psi) \right] \cdot \\ \cdot C_{\lambda}^{\lambda} \left[\cos(\psi/\alpha) \right] \cdot \sin^{2\lambda}(\psi/\alpha) d\psi =$$

$$= \frac{\omega_{n-1}}{C_L^\lambda(1)} \cdot \int_{B \cap I} e^{(\gamma+n-1)t} \cdot C_L^\lambda[\cos(\alpha^{-1} \arccos(e^{-\alpha t}))] \cdot \sin^{2\lambda}[\alpha^{-1} \arccos(e^{-\alpha t})] \cdot [1 - e^{-2\alpha t}]^{-1/2} dt.$$

Daraus folgt die Behauptung.

4.4 Lemma

1) Sind α und γ gemäß Konvention 3.1 2) gewählt, so genügen auch $\alpha' := -\alpha$ und $\gamma' := -\gamma - 2(n-1)$ dieser Konvention.

Und für eine beliebige solche Wahl gilt für alle $r \in \mathbb{R}$

$$\hat{S}_{\alpha\gamma}^0(r) = \hat{S}_{\alpha'\gamma'}^0(-r).$$

2) Für die Maße $\nu_{\alpha\gamma}^0$ aus Satz 4.3 gilt stets

$$\hat{\nu}_{\alpha\gamma}^0 \neq 0 \quad \lambda_{\mathbb{R}}\text{-f.ü.}$$

Beweis

$$\begin{aligned} 1) \quad \hat{S}_{\alpha\gamma}^0(r) &= C \cdot \int_I e^{-irt} e^{(\gamma+n-1)t} C_L^\lambda[\cos(\alpha^{-1} \arccos(e^{-\alpha t}))] \cdot \\ &\quad \cdot \sin^{2\lambda}[\alpha^{-1} \arccos(e^{-\alpha t})] \cdot [1 - e^{-2\alpha t}]^{-1/2} dt = \\ &= \hat{S}_{\alpha'\gamma'}^0(-r) \quad (\text{durch Substitution } s=-t). \end{aligned}$$

2) In 3) wird gezeigt, daß $\hat{S}_{\alpha\gamma}^0$ holomorph fortsetzbar ist auf den Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| < |\gamma+n-1|\}$. Somit besitzt $\hat{S}_{\alpha\gamma}^0$ höchstens abzählbar viele Nullstellen und es

folgt die Behauptung.

3) Wegen 1) sei o.E. $\alpha > 0$, also auch $-(\gamma+n-1) > 0$.

Nach einem Fortsetzungssatz für Fouriertransformierte genügt es, für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $|r| < -(\gamma+n-1)$ zu zeigen

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{rt} \cdot g_{\alpha\gamma}^{\frac{1}{2}}(t)| dt < \infty.$$

Sei also $|r| < -(\gamma+n-1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |e^{rt} \cdot g_{\alpha\gamma}^{\frac{1}{2}}(t)| dt &\leq C \cdot \int_0^{\infty} e^{rt} e^{(\gamma+n-1)t} (1 - e^{-2\alpha t})^{-1/2} dt \leq \\ &\leq C \cdot \int_0^{\infty} e^{(|r|+\gamma+n-1)t} (1 - e^{-2\alpha t})^{-1/2} dt = \\ &= \frac{C}{\alpha} \cdot \int_0^1 s^{-\frac{|r|+\gamma+n-1}{\alpha} - 1} (1 - s^2)^{-1/2} ds < \infty, \end{aligned}$$

da $|r|+\gamma+n-1 < 0$ gilt.

Aus Lemma 4.4 2) und der B_Q -Orthogonalität von $K_{\alpha\gamma}$ folgt nach Satz IV.2.5 unmittelbar die folgende Aussage.

4.5 Satz

Für α und γ gemäß Konvention 3.1 2) gilt:

$R_{\alpha\gamma}$ auf $L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}, \lambda_Q \otimes \lambda_{\mathbb{R}})$ ist injektiv.

4.6 Beweis von (EIII.1)

Die Aussage (EIII.1) ergibt sich nun aus Lemma 3.5 und Satz 4.5.

In Lemma 3.5 ist $\gamma = -(\epsilon+n)/p$ zu wählen, so daß $\epsilon = -\gamma p - n$ gilt.

V.5 Inversion der R_α -Transformationen

Wie in Beispiel II wird auch in diesem Abschnitt der in Lemma 3.5 formulierte Zusammenhang

$$\left[T_{\tilde{T}+n-1}(\tilde{R}_\alpha f) \right] \circ P = R_{\alpha\tilde{T}} \left[(T_{\tilde{T}}f) \circ P \right]$$

zur Umkehrung der R_α -Transformationen benutzt.

Hierzu wird zuerst die Inversion von $R_{\alpha\tilde{T}}$ betrachtet.

In Abschnitt V.5 sei stets $|\alpha| \geq 1/2$ und $\tilde{T}$ zu α gemäß Konvention 3.1 2) gewählt.

5.1 Inversion von $R_{\alpha\tilde{T}}$

Es sei $g \in L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}, \lambda_Q \otimes \lambda_{\mathbb{R}})$.

Dann gilt auch $R_{\alpha\tilde{T}}g \in L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}, \lambda_Q \otimes \lambda_{\mathbb{R}})$ und nach IV.2.4 erhält man eine Entwicklung der Form

$$R_{\alpha\tilde{T}}g = \sum_{Y_{lm} \in B_Q} Y_{lm} \otimes P_{lm}(R_{\alpha\tilde{T}}g) \quad \text{mit}$$

$$P_{lm}(R_{\alpha\tilde{T}}g) = \int_{S^{n-1}} R_{\alpha\tilde{T}}g(\omega, \cdot) \cdot Y_{lm}(\omega) \lambda_Q(d\omega) \in L^2(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}}).$$

$$\text{Analog gilt } g = \sum_{Y_{lm} \in B_Q} Y_{lm} \otimes P_{lm}(g)$$

$$\text{mit } P_{lm}(g) \in L^2(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}}).$$

Für alle $l \in \mathbb{N}_0$ und $m \in M_l$ gilt nun:

Ist die Fourier-Plancherel-Transformierte

$$P_{lm}(g)^\wedge \in L^1(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}}), \text{ so folgt}$$

$$P_{lm}(g)(r) = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{irt} \cdot \frac{P_{lm}(R_{\alpha\gamma}g)^\wedge(t)}{\hat{\nu}_{\alpha\gamma}^l(-t)} dt$$

für f.a. $r \in \mathbb{R}$.

$\hat{\nu}_{\alpha\gamma}^l$ kann hierbei gemäß Satz 4.3 berechnet werden.

Und bei $P_{lm}(R_{\alpha\gamma}g) \in L^1(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}})$ erhält man die Fourier-Plancherel-Transformierte $P_{lm}(R_{\alpha\gamma}g)^\wedge$ als gewöhnliche Fourier-Transformierte für f.a. $r \in \mathbb{R}$ zu

$$P_{lm}(R_{\alpha\gamma}g)^\wedge(r) = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-irt} \cdot P_{lm}(R_{\alpha\gamma}g)(t) dt.$$

Beweis

Seien $l \in \mathbb{N}_0$, $m \in M_l$ und $P_{lm}(g)^\wedge \in L^1(\mathbb{R}, \lambda_{\mathbb{R}})$.

Aus dem Beweis zur Umkehrformel IV.2.6 erhält man

$$P_{lm}(R_{\alpha\gamma}g) = P_{lm}(g) * (\nu_{\alpha\gamma}^l)^*.$$

Die Anwendung der Fourier-Plancherel-Transformation ergibt

$$P_{lm}(R_{\alpha\gamma}g)^\wedge(r) = P_{lm}(g)^\wedge(r) \cdot \hat{\nu}_{\alpha\gamma}^l(-r) \text{ für f.a. } r \in \mathbb{R}$$

und nach Lemma 4.4 2) folgt weiter

$$P_{lm}(g)^\wedge(r) = \frac{P_{lm}(R_{\alpha\gamma}g)^\wedge(r)}{\hat{\nu}_{\alpha\gamma}^l(-r)} \text{ für f.a. } r \in \mathbb{R}.$$

Mit der gewöhnlichen Umkehrformel für die Fouriertransformation auf $\mathbb{R}$ folgt schließlich die Behauptung.

5.2 Inversion der R_α -Transformationen

Seien $|\alpha| \geq 1/2$ und $\varepsilon > n-2$ bei $\alpha > 0$ bzw. $\varepsilon < n-2$ bei $\alpha < 0$, so daß R_α auf $L^2(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx)$ definiert ist. Bei $\gamma := -(\varepsilon+n)/2$, also $\varepsilon = -2\gamma-n$, ist dann Konvention 3.1 2) erfüllt.

Für eine Abbildung $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx)$ erhält man aus Lemma 3.4

$$(1) \quad g := T_\gamma f \circ P \in L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}, \lambda_Q \otimes \lambda_{\mathbb{R}})$$

und mit Lemma 3.5

$$(2) \quad R_{\alpha\gamma} g = \{T_{\gamma+n-1}(\tilde{R}_\alpha f)\} \circ P.$$

Sind nun die Voraussetzungen in 5.1 erfüllt, so erhält man nach Berechnung von $R_{\alpha\gamma} g$ gemäß (2) g durch Anwendung der in 5.1 beschriebenen Inversionsformel.

f ergibt sich schließlich aus (1) zu

$$f(x) = \|x\|^\gamma \cdot g(x/\|x\|, \ln\|x\|) \quad \text{für f.a. } x \in \mathbb{R}^n.$$

V.6 Der Zusammenhang zwischen R_α und $R_{-\alpha}$

6.1 Beweis von (EIV.1)

Bei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, $\tau \in \mathbb{R}$ und $I_\tau f(x) = \|x\|^{-\tau} f(x/\|x\|^2)$

($x \neq 0$) gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$I_\tau(I_\tau f)(x) = \|x\|^{-\tau} I_\tau f(x/\|x\|^2) = \|x\|^{-\tau} (1/\|x\|)^{-\tau} f(x) = f(x).$$

Außerdem erhält man für beliebige $\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |I_\tau f(x)|^p \|x\|^{\tau p - 2n - \varepsilon} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^{-\tau p} |f(x/\|x\|^2)|^p \|x\|^{\tau p - 2n - \varepsilon} dx = \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty |f(\omega/r)|^p r^{-2n - \varepsilon} r^{n-1} dr \lambda_Q(d\omega) = \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty |f(s\omega)|^p s^{\varepsilon + n - 1} ds \lambda_Q(d\omega) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \|x\|^\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Damit ist Aussage (EIV.1) bewiesen.

6.2 Lemma

Seien α und τ gemäß 3.1 2) gewählt, so daß auch $\alpha' := -\alpha$ und $\tau' := -\tau - 2(n-1)$ dieser Konvention genügen.

$j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \longmapsto -r$ bezeichne die Inversion in $\mathbb{R}$.

Mit den integrierenden Kernen $K_{\alpha\gamma}$ bzw. $K_{\alpha',\gamma'}$ aus 3.3 gilt dann für alle $\omega, \xi \in S^{n-1}$

$$K_{\alpha\gamma}(\omega, \xi; \cdot) = K_{\alpha',\gamma'}(\omega, \xi; \cdot) \circ j^{-1} = K_{\alpha',\gamma'}^*(\omega, \xi; \cdot).$$

Ist weiter $f : S^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ eine meßbare Abbildung und setzt man $J_1 f(\omega, t) := f(\omega, -t)$ ($\omega \in S^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$), so gilt also

$$\begin{aligned} J_1 \{R_{\alpha\gamma} f\}(\omega, t) &= R_{\alpha\gamma} f(\omega, -t) = \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi, r-t) K_{\alpha\gamma}(\omega, \xi; dr) \lambda_Q(d\xi) = \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} [J_1 f](\xi, -r+t) K_{\alpha',\gamma'}^*(\omega, \xi; dr) \lambda_Q(d\xi) = \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} [J_1 f](\xi, r+t) K_{\alpha',\gamma'}(\omega, \xi; dr) \lambda_Q(d\xi) = \\ &= R_{\alpha',\gamma'} \{J_1 f\}(\omega, t), \end{aligned}$$

sofern eines der auftretenden Integrale existiert.

Beweis

Seien $\omega, \xi \in S^{n-1}$.

Nach 3.3 gilt dann mit der Abkürzung $a := \arccos \langle \omega, \xi \rangle$

$$\begin{aligned} K_{\alpha\gamma}(\omega, \xi; \cdot) &= \chi_{[\cos(\pi/2\alpha), 1]}(\langle \omega, \xi \rangle) \cdot \\ &\cdot \cos^{-\frac{\gamma+n-1}{\alpha}} - 1_{(\alpha a)} \cdot \delta_{\ln[\cos^{-1/\alpha}(\alpha a)]} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \chi_{] \cos(\pi/2\alpha'), 1[}(\langle \omega, \xi \rangle) \cdot \\
 &\quad \cdot \cos \frac{-\gamma' + n - 1}{\alpha'} - 1 \quad (\alpha' a) \cdot \delta_{-\ln[\cos^{-1}/\alpha'(\alpha' a)]} = \\
 &= K_{\alpha', \gamma'}(\omega, \xi; \cdot) \circ j^{-1}.
 \end{aligned}$$

6.3 Beweis von (EIV.2)

Seien $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ meßbar und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Dann erhält man unter Benutzung der Integralumformungen im Beweis zu Lemma 3.5 (mit $\omega = x/\|x\|$, $t = \ln\|x\|$, $P(\omega, t) = x$):

$$\begin{aligned}
 \sim R_{\alpha'} f(x) &\stackrel{(3.5)}{=} \|x\|^{\gamma' + n - 1} \cdot R_{\alpha', \gamma'}(T_{\gamma'} f \circ P)(x/\|x\|, \ln\|x\|) \stackrel{(6.2)}{=} \\
 &= \|x\|^{-\gamma' - (n-1)} \cdot R_{\alpha', \gamma'}(J_1[T_{\gamma'} f \circ P])(x/\|x\|, -\ln\|x\|) \stackrel{(*)}{=} \\
 &= (1/\|x\|)^{\gamma' + n - 1} \cdot R_{\alpha', \gamma'}(T_{\gamma'}(I_{2n-2} f) \circ P)(x/\|x\|, \ln(1/\|x\|)) \stackrel{(3.5)}{=} \\
 &= R_{\alpha'}[I_{2n-2} f](x/\|x\|^2), \text{ sofern eines der auftretenden}
 \end{aligned}$$

Integrale existiert, so daß (EIV.2) folgt.

Zu (*):

$$\begin{aligned}
 J_1[T_{\gamma'} f \circ P](\omega, t) &= T_{\gamma'} f(e^{-t}\omega) = e^{\gamma' t} \cdot f(e^{-t}\omega) = \\
 &= e^{-\gamma' t} \cdot e^{(-2n-2)t} \cdot f(e^{-t}\omega) = e^{-\gamma' t} \cdot (I_{2n-2} f)(e^t \omega) = \\
 &= T_{\gamma'}[I_{2n-2} f] \circ P(\omega, t).
 \end{aligned}$$

VI. Beispiel: Die Funkttransformation

In seiner 1911 erschienenen Dissertation [12] bei Hilbert untersucht P. Funk, inwieweit eine Funktion auf der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ durch ihre Integrale über alle Großkreise bestimmt ist. Für die daraus abgeleitete (Funk)transformation gibt er ein System von Eigenfunktionen an, die gleichzeitig ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2(S^2)$ darstellen. Dieser Satz von Funk, der auch in der vorliegenden Arbeit angegeben wird (Satz 3.1), ist in vielen Arbeiten Ausgangspunkt zur Definition der Funkttransformation auf $L^2(S^2)$ (Prinzip der stetigen Fortsetzung vom span der Eigenfunktionen auf ganz L^2). Mit der in Abschnitt IV dieser Arbeit entwickelten Theorie hingegen läßt sich die Funkttransformation für alle L^p -Funktionen (bei beliebigem $p \in [1, \infty]$) auf natürliche Weise durch Integration über Großkreise erklären. Erst zur Untersuchung der Injektivität wird dann auch der Satz von Funk herangezogen.

Praktische Anwendung findet die Funkttransformation in der Geophysik. Aus den Umlaufzeiten von Oberflächenwellen, die von starken Erdbeben ausgehen und von seismographischen Stationen registriert werden, lassen sich Informationen über die oberen Erdschichten gewinnen. Siehe hierzu Backus [1] und Campi [4].

VI.1 Die Funktransformation F und ihre Eigenschaften

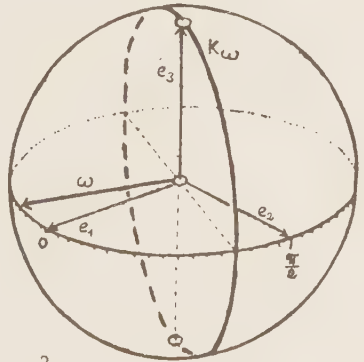
1.1 Definition

Für $\omega \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ heißt $K_\omega := \{ \xi \in S^2 \mid \langle \omega, \xi \rangle = 0 \}$

der zu ω orthogonale Großkreis.

κ_ω bezeichne das auf K_ω

konzentrierte Bogenmaß.



λ_S sei das übliche Oberflächenmaß auf S^2 .

Für eine Abbildung $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ sei nun – sofern existent –

$$Ff(\omega) := \int_{K_\omega} f(\xi) \kappa_\omega(d\xi)$$

das Integral von f über den Großkreis K_ω .

Existiert $Ff(\omega)$ für fast alle $\omega \in S^2$, so heißt

Ff die Funktransformierte von f .

Durch Darstellung der Funktransformation als Mischung von Faltungen erhält man nun die im folgenden beschriebenen Resultate.

1.2 Ergebnisse

Sei $p \in [1, \infty]$. Dann gilt:

(E1) Jede Abbildung $f \in \mathcal{L}^p(S^2, \lambda_S)$ ist für fast alle $\omega \in S^2$ über den Großkreis K_ω integrierbar.

(E2) Die Funktransformation

$$F : L^p(S^2, \lambda_S) \longrightarrow L^p(S^2, \lambda_S)$$

ist wohldefiniert, linear und stetig mit $\|F\| = 2\pi$.

Offensichtlich ist die Funktransformation nicht injektiv; denn für jede ungerade Funktion f ($f(\omega) = -f(-\omega) \quad \forall \omega \in S^2$) ist das Integral über einen beliebigen Großkreis gleich Null. Gerade L^2 -Funktionen lassen sich jedoch aus ihrer Funktransformierten rekonstruieren:

1.3 Zur Injektivität der Funktransformation

Für eine Abbildung $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ seien

$$f_g : S^2 \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad f_g(\omega) := \frac{1}{2} [f(\omega) + f(-\omega)] \quad \text{bzw.}$$

$$f_u : S^2 \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad f_u(\omega) := \frac{1}{2} [f(\omega) - f(-\omega)]$$

der gerade bzw. ungerade Teil von f .

Bei $L_g^2(S^2, \lambda_S) := \{ f \in L^2(S^2, \lambda_S) \mid f = f_g \}$ und

$L_u^2(S^2, \lambda_S) := \{ f \in L^2(S^2, \lambda_S) \mid f = f_u \}$ ist

dann $L^2(S^2, \lambda_S)$ die direkte Summe von $L_g^2(S^2, \lambda_S)$ und $L_u^2(S^2, \lambda_S)$ und es gilt:

$$(E3.1) \quad F|_{L_u^2(S^2, \lambda_S)} = 0, \quad Ff = Ffg \quad \text{für alle } f \in L^2(S^2, \lambda_S).$$

$$(E3.2) \quad F|_{L_g^2(S^2, \lambda_S)} \quad \text{ist injektiv.}$$

$$(E3.3) \quad \text{Die Umkehrabbildung } F^{-1} : \text{Bild}(F) \longrightarrow L_g^2(S^2, \lambda_S) \\ \text{ist nicht stetig.}$$

VI.2 Darstellung der Funktransformation F als gemischter

Faltungsoperator

2.1 Parametrisierungen

1) Die Sphäre S^2 läßt sich wie folgt parametrisieren:

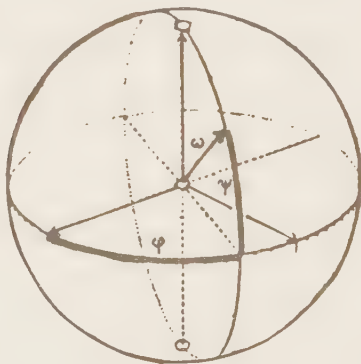
$$]-\pi/2, \pi/2[\times [0, 2\pi[\longrightarrow S^2 \setminus \{-e_3, e_3\}$$

$$(\psi, \varphi) \longmapsto \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\psi \\ \sin\varphi \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix}$$

Die Winkel ψ und φ bezeichnen also den Breiten- bzw. Längengrad.

Für diese Parametrisierung gilt

$$d\lambda_S = \cos\psi \, d\psi \, d\varphi$$



2) Bei $\omega = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \\ 0 \\ \sin \vartheta \end{bmatrix}$ mit $\vartheta \in]-\pi/2, \pi/2[$ läßt sich

K_ω durch die folgenden beiden Wege beschreiben

(Parametrisierung über den Breitengrad in zwei

Kreishälften) :

$$+ \Gamma :] |\vartheta| - \pi/2, \pi/2 - |\vartheta| [\longrightarrow +K_\omega := \{ \xi \in K_\omega \mid \langle \xi, e_2 \rangle > 0 \}$$

$$\psi \longmapsto \begin{bmatrix} -\sin\psi \tan\vartheta \\ + \left[1 - (\sin^2\psi / \cos^2\vartheta) \right]^{1/2} \\ \sin\psi \end{bmatrix}$$

$$- \Gamma :] |\vartheta| - \pi/2, \pi/2 - |\vartheta| [\longrightarrow -K_\omega := \{ \xi \in K_\omega \mid \langle \xi, e_2 \rangle < 0 \}$$

$$\psi \longmapsto \begin{bmatrix} -\sin\psi \tan\vartheta \\ - \left[1 - (\sin^2\psi / \cos^2\vartheta) \right]^{1/2} \\ \sin\psi \end{bmatrix}$$

Man erhält für $\psi \in] |\vartheta| - \pi/2, \pi/2 - |\vartheta| [$:

$$\begin{aligned} \left((+\Gamma_1'^2 + +\Gamma_2'^2 + +\Gamma_3'^2)(\psi) \right)^{1/2} &= \left((-\Gamma_1'^2 + -\Gamma_2'^2 + -\Gamma_3'^2)(\psi) \right)^{1/2} = \\ &= \frac{\cos \psi}{\left[\cos^2\vartheta - \sin^2\psi \right]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Für eine über K_ω integrierbare Abbildung $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{K}$

gilt also

$$\int_{K_\omega} f(\xi) \quad \kappa_\omega(d\xi) =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{|\vartheta| - \pi/2}^{\pi/2 - |\vartheta|} \left[f \left[\begin{bmatrix} -\sin\psi \tan\vartheta \\ (1 - (\sin^2\psi / \cos^2\vartheta))^{1/2} \\ \sin\psi \end{bmatrix} \right] + f \left[\begin{bmatrix} -\sin\psi \tan\vartheta \\ -(1 - (\sin^2\psi / \cos^2\vartheta))^{1/2} \\ \sin\psi \end{bmatrix} \right] \right] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\cos \psi}{\left[\cos^2\vartheta - \sin^2\psi \right]^{1/2}} \quad d\psi. \end{aligned}$$

Mit den in 2.1 bereitgestellten Hilfsmitteln läßt sich die Funktransformation nun in der folgenden Weise als gemischte Faltung darstellen.

2.2 Definition und Bemerkung

Setze $X := \mathbb{T}$ und $\lambda_X := 2\pi \lambda_{\mathbb{T}}$, so daß $\lambda_X(X) = 2\pi$.

Weiter sei $\Omega :=]-\pi/2, \pi/2[$ mit dem durch

$\lambda_{\Omega}(B) := \int_B \cos \psi \, d\psi \quad [B \in \mathcal{B}(\Omega)]$ definierten Maß λ_{Ω} .

$\Omega \times X$ ist dann isomorph zu $S^2 \setminus \{e_3, -e_3\}$ vermöge der Abbildung

$$P: \Omega \times X \longrightarrow S^2 \setminus \{e_3, -e_3\}, \quad (\psi, e^{i\varphi}) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\varphi \\ \sin\psi \cos\varphi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$$

und es gilt $\lambda_S = [\lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X] \circ P^{-1}$ (vgl. 2.1 1)).

Schließlich sei $K: \Omega \times \Omega \times \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$

mit

$$K(\vartheta, \psi; \cdot) := \frac{\chi_{[0, \pi/2[}(|\vartheta| + |\psi|)}{[\cos^2\vartheta - \sin^2\psi]^{1/2}}.$$

$$\cdot \left[\delta_{e^{i\arccos(-\tan\vartheta\tan\psi)}} + \delta_{e^{-i\arccos(-\tan\vartheta\tan\psi)}} \right]$$

für alle $\vartheta, \psi \in \Omega$.

K ist damit so gewählt, daß $\int_{\Omega} \int_X f \circ P(\psi, x) K(\vartheta, \psi; dx) \lambda_{\Omega}(d\psi)$

das Integral von f über den Großkreis K_{ω} ergibt. Siehe hierzu 2.1 2) und Lemma 2.4.

Da K symmetrisch in ϑ und ψ ist, gilt für alle $\vartheta \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K(\psi, \vartheta; X) \lambda_{\Omega}(d\psi) &= \int_{\Omega} K(\vartheta, \psi; X) \lambda_{\Omega}(d\psi) = \\ &= \int_{\{|\vartheta|+|\psi| < \pi/2\}} \frac{2}{[\cos^2 \vartheta - \sin^2 \psi]^{\frac{1}{2}}} \cos \psi \, d\psi = \\ &= \int_{|\vartheta|-\pi/2}^{\pi/2-|\vartheta|} \frac{2 \cos \psi}{[\cos^2 \vartheta - \sin^2 \psi]^{\frac{1}{2}}} \, d\psi = \int_{K_{\omega}} 1 \, \kappa_{\omega}(d\psi) = \\ &= 2\pi =: C_K < \infty. \end{aligned}$$

K ist also ein integrierender Kern.

Nach Satz IV.1.3 ist somit für $p \in [1, \infty]$

$$F : L^p(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X) \longrightarrow L^p(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X)$$

$$f \longmapsto Ff$$

mit

$$Ff(\vartheta, z) := \int_{\Omega} \int_X f(\psi, x) K_z(\vartheta, \psi; dx) \lambda_{\Omega}(d\psi)$$

eine stetige lineare Abbildung mit $\|F\| \leq C_K = 2\pi$.

Für $f = 1$ ist $f \in L^p(\Omega \times X, \lambda_{\Omega} \otimes \lambda_X)$ für alle $p \in [1, \infty]$

und $Ff = 2\pi = 2\pi \cdot f$.

Also gilt $\|F\| = 2\pi$

2.3 Lemma

Sei $p \in [1, \infty]$.

Für eine Abbildung $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ gilt wegen

$$\lambda_S = (\lambda_Q \theta \lambda_X) \circ P^{-1} \quad \text{dann}$$

$$f \in L^p(S^2, \lambda_S) \iff f \circ P \in L^p(Q \times X, \lambda_Q \theta \lambda_X)$$

und in diesem Fall erhält man $\|f\|_p = \|f \circ P\|_p$.

2.4 Lemma

Für $p \in [1, \infty]$ und $f \in L^p(S^2, \lambda_S)$ gilt

$$(Ff) \circ P = F(f \circ P) \quad \text{in } L^p(Q \times X, \lambda_Q \theta \lambda_X).$$

Beweis

1) Sei $z = e^{i\psi} \in T$ und $A_z : S^2 \longrightarrow S^2$ mit

$$\varepsilon \longmapsto \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \varepsilon \quad \text{die Drehung um}$$

den Winkel ψ mit Drehachse e_3 .

Dann gilt offensichtlich für alle $\psi \in Q$ und $x \in T$

$$P(\psi, x \cdot z) = A_z \circ P(\psi, x).$$

Und für $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ erhält man bei $\omega \in S^2$

$$\int_{S^2} f(\varepsilon) \kappa_{A_z(\omega)}(d\varepsilon) = \int_{S^2} f \circ A_z(\omega) \kappa_\omega(d\varepsilon)$$

2) Seien $p \in [1, \infty]$ und $f \in L^p(S^2, \lambda_S)$.

Nach Lemma 2.3 ist dann $f \circ P \in L^p(\Omega \times X, \lambda_\Omega \otimes \lambda_X)$.

Gemäß Bemerkung 2.2 gilt also

$F(f \circ P) \in L^p(\Omega \times X, \lambda_\Omega \otimes \lambda_X)$ und für fast alle

$(\varphi, z) \in \Omega \times X$ (mit $z = e^{i\varphi}$) gilt:

$$F(f \circ P)(\varphi, z) = \int_{\Omega} \int_X f \circ P(\psi, x \cdot z) K(\varphi, \psi; dx) \lambda_{\Omega}(d\psi) =$$

$\pi/2 - |\varphi|$

$$= \int \left[f \circ A_Z \circ P(\psi, e^{i \arccos(-\tan \varphi \tan \psi)}) + f \circ A_Z \circ P(\psi, e^{-i \arccos(-\tan \varphi \tan \psi)}) \right].$$

$|\varphi| - \pi/2$

$$\cdot \frac{\cos \psi}{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi)^{1/2}} d\psi =$$

$\pi/2 - |\varphi|$

$$= \int \left[f \circ A_Z \left[\frac{-\tan \varphi \tan \psi \cos \psi}{(1 - \tan^2 \varphi \tan^2 \psi)^{1/2} \sin \psi} \right] + f \circ A_Z \left[\frac{-\tan \varphi \tan \psi \cos \psi}{(1 - \tan^2 \varphi \tan^2 \psi)^{1/2} \sin \psi} \right] \right].$$

$|\varphi| - \pi/2$

$$\cdot \frac{\cos \psi}{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi)^{1/2}} d\psi =$$

$$= \int_{K_P(\varphi, 1)} f \circ A_Z(\xi) K_P(\varphi, 1)(d\xi) =$$

$$= \int_{K_P(\varphi, z)} f(\xi) K_P(\varphi, z)(d\xi) = Ff[P(\varphi, z)].$$

2.5 Die Aussagen (E1) und (E2)

folgen nun direkt aus Bemerkung 2.2 und den
Lemmata 2.3 und 2.4 .

VI.3 Kugelfunktionen als Eigenvektoren der Funkttransformation

Der folgende Satz, der bereits von Funk in seiner Dissertation angegeben wird, ist Grundlage für den Beweis der Aussagen (E3.1) bis (E3.3). Eine ausführliche Darstellung findet man in Backus [1] (insbes. (44)).

3.1 Satz

$L^2(S^2, \lambda_S)$ besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem

$\{ Y_{lm} \mid l \in \mathbb{N}_0; m=0, \dots, 2l \}$ aus komplexen Kugelfunktionen

Y_{lm} (vom Grad l), für die gilt:

$$F(Y_{lm}) = 2\pi \cdot B_l \cdot Y_{lm} \quad (l \in \mathbb{N}_0; m=0, \dots, 2l),$$

wobei

$$B_l = \begin{cases} 0 & \text{falls } l \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^{l/2} l!}{2^l [(l/2)!]^2} & \text{falls } l \text{ gerade} \end{cases}$$

Y_{lm} ist also ein Eigenvektor der Funkttransformation zum

Eigenwert $2\pi \cdot B_l$.

Für die Folge der B_l gilt:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |B_{2l}| \cdot l^{1/2} = \pi^{-1/2},$$

$$\text{insbesondere } \lim_{l \rightarrow \infty} B_{2l} = 0 \quad (\text{siehe Thoma [24]}).$$

3.2 Beweis der Aussagen (E3.1) bis (E3.3)

Für eine ungerade Abbildung $f = f_u \in L^2(S^2, \lambda_S)$

ist offensichtlich $Ff = 0$.

Daher gilt auch stets $Ff = F(f_g + f_u) = Ff_g$ bei

$f \in L^2(S^2, \lambda_S)$. Damit ist (E3.1) bereits bewiesen.

Sei nun $f = f_g \in L^2_g(S^2, \lambda_S)$.

$Ff \in L^2(S^2, \lambda_S)$ ist stets eine gerade Funktion und es

gibt $c_{lm} \in \mathbb{K}$ mit

$$Ff = \sum_{\substack{l \in \mathbb{N}_0, l \text{ gerade} \\ m=0, \dots, 2l}} c_{lm} \cdot Y_{lm}.$$

$$\text{Nach Satz 3.1 folgt } f = \sum_{\substack{l \in \mathbb{N}_0, l \text{ gerade} \\ m=0, \dots, 2l}} \frac{c_{lm}}{2\pi B_l} \cdot Y_{lm}.$$

Somit ist f eindeutig bestimmt und (E3.2) bewiesen.

Aussage (E3.3) folgt schließlich aus

$$F^{-1}Y_{2lm} = \frac{1}{2\pi B_{2l}} \cdot Y_{2lm} \quad \text{und} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} B_{2l} = 0.$$

Anhang

Beweis von Satz I.1.6	112
Darstellung ausgewählter α -Kurven	113
Bezeichnungen und Symbole	118
Literaturverzeichnis	122

Beweis von Satz I.1.6

a) Für $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ und $f \in L^p(X, \lambda_X)$ gilt:

$$\begin{aligned} & \int_X \left[\int_X |f(y-x)| |\nu|(dx) \right]^p \lambda_X(dy) \leq \\ & \leq \int_X \int_X |f(y-x)|^p |\nu|(dx) \cdot \left[\int_X 1^q |\nu|(dx) \right]^{p/q} \lambda_X(dy) = \\ & = |\nu|(X)^{p/q} \int_X \int_X |f(y-x)|^p \lambda_X(dy) |\nu|(dx) = \\ & = \|\nu\|^{p/q} \cdot \|f\|_p^p \cdot |\nu|(X) = \|\nu\|^p \cdot \|f\|_p^p < \infty. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini folgt also die Existenz von

$$\int_X |f(y-x)| |\nu|(dx) \quad \text{für } \lambda_X\text{-f.a. } y \in X \text{ und es}$$

$$\text{gilt } \left[\int_X |f(\cdot-x)| |\nu|(dx) \right]^p \in L^1(X, \lambda_X).$$

Somit existiert $\nu * f$ λ_X -f.ü. und $\nu * f \in L^p(X, \lambda_X)$.

Da gemäß oben $\|\nu * f\|_p \leq \|\nu\| \cdot \|f\|_p$ gilt, folgt die

Behauptung.

b) Für $p = 1$ folgt die Behauptung analog a) aus

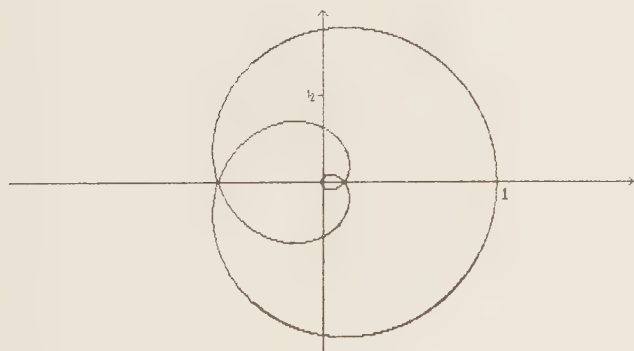
$$\begin{aligned} & \int_X \int_X |f(y-x)| |\nu|(dx) \lambda_X(dy) = \int_X \int_X |f(y-x)| \lambda_X(dy) |\nu|(dx) = \\ & = \|\nu\| \cdot \|f\|_1 \quad \text{für } f \in L^1(X, \lambda_X). \end{aligned}$$

c) Bei $p = \infty$ folgt schließlich die Behauptung aus

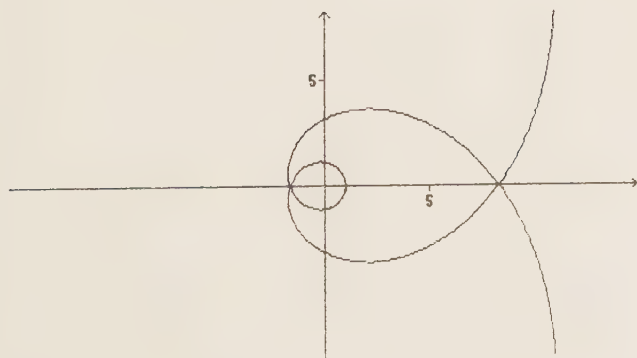
$$\int_X |f(y-x)| |\nu|(dx) \leq \|f\|_\infty \cdot \|\nu\| \quad \text{für } f \in L^\infty(X, \lambda_X), y \in X.$$

Darstellung ausgewählter α -Kurven zu Abschnitt II

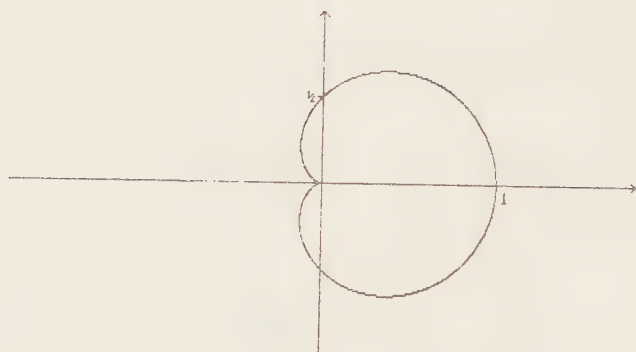
α -Kurve zu $\alpha = -0,1$



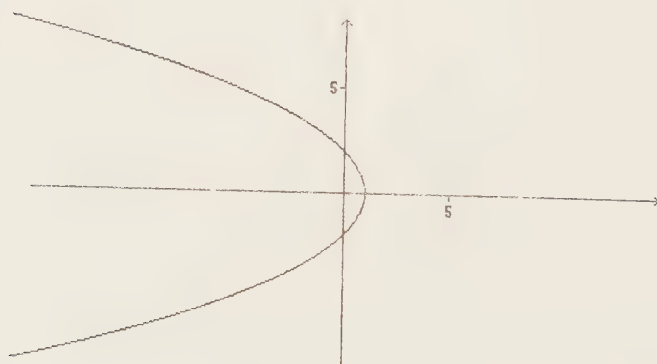
α -Kurve zu $\alpha = 0,1$



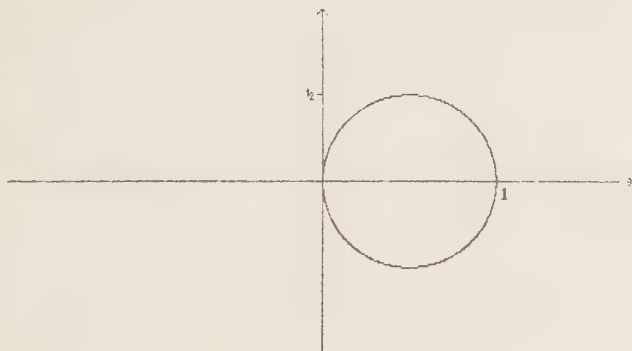
α -Kurve zu $\alpha = -0,5$



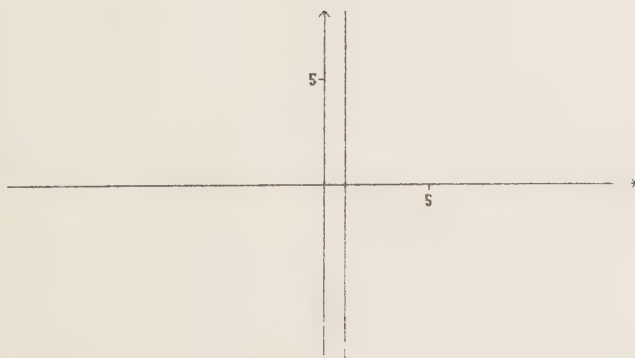
α -Kurve zu $\alpha = 0,5$



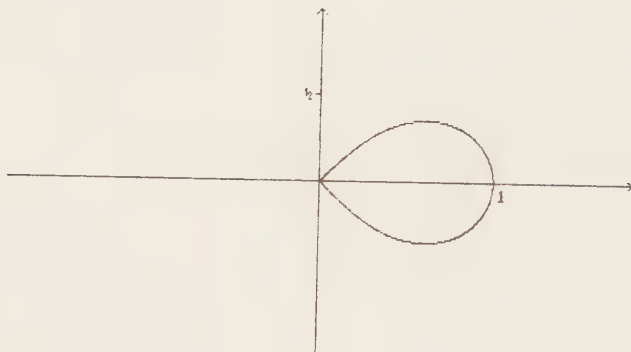
α -Kurve zu $\alpha = -1$



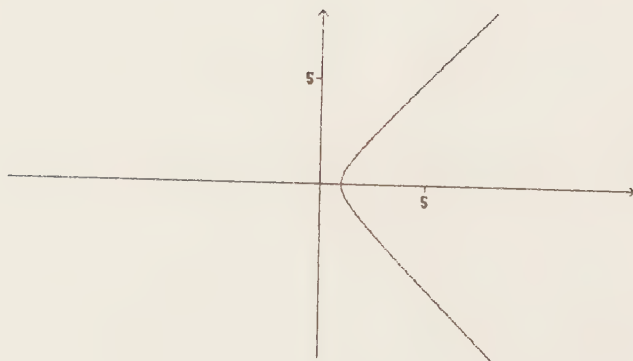
α -Kurve zu $\alpha = 1$



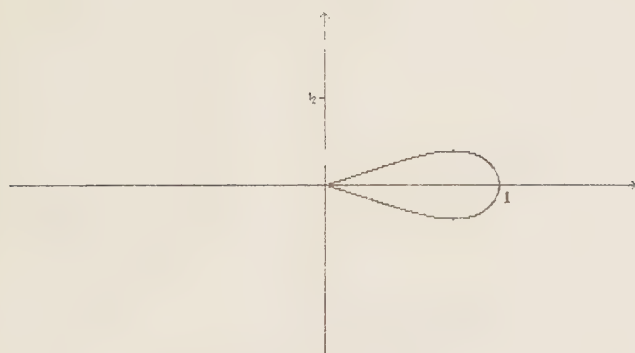
α -Kurve zu $\alpha = -2$



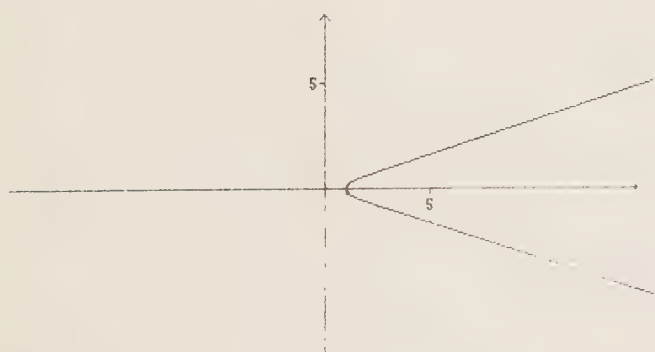
α -Kurve zu $\alpha = 2$



α -Kurve zu $\alpha = -5$



α -Kurve zu $\alpha = 5$



Bezeichnungen und Symbole

- $\Lambda(\Gamma) = \{ \hat{f} \mid f \in \mathcal{L}^1(X, \lambda_X) \}$, siehe I.3.6, S.10
 Λ_Z siehe Beweis zu VI.2.4, S.106
 $B(X)$ Borel- σ -Algebra auf X
 $B(X)$ siehe I.3.8, S.11
 B_Q siehe IV.2.4, S.63
 B_Q -orthogonal siehe IV.2.4, S.64
 B_R siehe VI.3.1, S.109
 C_K Konstante, siehe IV.1.1, S.59
 $C(X)$ stetige Abbildungen auf X
 $C^b(X)$ beschränkte stetige Abbildungen auf X
 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ beliebig oft differenzierbare Abbildungen
 $C_L^\wedge$ Gegenbauer-Polynom, siehe V.4.2, S.86
 $D(\mathbb{R}^n)$ C^∞ -Abbildungen mit kompaktem Träger, Testfunktionen
 δ_x Dirac-Maß zum Punkt x
 F Funktransformation, siehe VI.1.1, S.99
 F siehe VI.2.2, S.105
 $\Gamma = \Gamma(X)$ Charaktergruppe zu X , siehe I.3.1, S.8
 H_α α -Hyperfläche, siehe V.1.1, S.67
 $I_{\frac{1}{2}}$ siehe II.2.3, Teil IV, S.27, V.2.4, Teil IV, S.72
 j Inversion in X , siehe I.2.1, S.5
 K steht für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
 K_ω Großkreis, siehe VI.1.1, S.99
 κ_ω Bogenmaß auf K_ω
 K_α α -Kurve, siehe II.1.1, S.20
 K Kern, siehe IV.1.1, S.58
 K_X, K^* siehe IV.1.2, S.59
 $K_{\mathbb{D}}$ siehe IV.2.1, S.62

$K_{\alpha\beta}$ siehe V.3.3, S.79

$K_{\alpha\beta}^{lm}$ siehe V.4.3, S.87

Λ_f temperierte Distribution, siehe II.2.2, S.54

λ_X Haar-Maß auf X , siehe I.1.2, S.2

λ, λ_n Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$

$\lambda_{\mathbb{R}} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \lambda$

λ_T Haar-Maß auf T mit $\lambda_T(T)=1$

$\lambda_{\mathbb{Z}}$ Zählmaß auf $\mathbb{Z}$

λ_{H_α} Oberflächenmaß einer α -Hyperfläche, siehe V.2, S.70

$\lambda_Q, \lambda_{Q_\omega}$ siehe V.1.3, S.68f

λ_S Oberflächenmaß auf S^2

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f: X \longrightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_p = \left[\int_X |f(x)|^p \mu(dx) \right]^{1/p} < \infty \right\}$$

mit Halbnorm $\|\cdot\|_p$

$L^p(X, \mu)$ der assoziierte normierte Raum

$f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ und die zugehörige Äquivalenzklasse in $L^p(X, \mu)$ werden in der Schreibweise nicht unterschieden

$$L^p(\mathbb{R}, dr) = L^p(\mathbb{R}, \lambda)$$

$$L^p(\mathbb{R}^n, dx) = L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$$

$$L^p(\mathbb{R}^n, \|x\|^\varepsilon dx) = \left\{ f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K} \mid \|f\|_{p, \|x\|^\varepsilon} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \|x\|^\varepsilon dx \right]^{1/p} < \infty \right\}$$

$M^b(X)$ Raum der Borel-Maße auf X (finite, komplexwertige, reguläre Maße auf $B(X)$)

$|\mu|$ Totalvariation von $\mu \in M^b(X)$, mit $|\mu|(B) =$

$$= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(B_i)| \mid n \in \mathbb{N}, (B_i) \text{ disj. Zerlegung von } B \text{ in } B(X) \right\}$$

$\|\mu\| = |\mu|(X)$ Norm der Totalvariation

$M^{b+}(X)$ nichtnegative Borel-Maße

ν_X siehe I.2.1, S.5 bzw. IV.1.2, S.59

$\nu^{\#}$ Bildmaß unter der Inversion, siehe I.2.1, S.5

$\nu_{\alpha\beta}$ siehe II.3.3, S.31

$\nu_{\overline{\beta}}$ siehe IV.2.4, S.64

$\nu_{\alpha\beta}^{\mathbb{E}}$ siehe V.4.3, S.87

$O(n)$ Menge der reellen, orthogonalen $n \times n$ -Matrizen

ω_n Oberfläche der Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$

P siehe II.3.3, S.31 bzw. V.3.3, S.79 bzw. VI.2.2, S.104

P_{μ}, P_A Pompeiu-Transformationen, siehe III.1.1 und III.1.2, S.48f

$P_{\overline{\beta}}$ siehe IV.2.4, S.64

$P^{\mathbb{R}_{\mu}}$ siehe I.2.2, S.5

$R_{\alpha}, \tilde{R}_{\alpha}$ Radontransformationen nach Cormack, siehe II und V

$R_{\alpha\beta}$ siehe II.3.3, S.31 bzw. V.3.3, S.80

R_K siehe IV.1.3, S.60

$\mathbb{R}^+ =]0, \infty[$, $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty[$

$SH_{\mathbb{E}}$ siehe V.4.1, S.86

$S(\mathbb{R}^n)$ Schwartz-Raum der schnellfallenden C^{∞} -Abbildungen,
siehe Rudin [19,7.3]

$S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$ Einheitssphäre mit Oberfläche ω_n
und Oberflächenmaß λ_Q

$S_{\omega} = \{ \tau \in S^{n-1} \mid \langle \omega, \tau \rangle = 0 \}$ $(n-2)$ -dimensionale Sphäre mit
mit Oberflächenmaß $\lambda_{Q_{\omega}}$, siehe V.1.3, S.68f

$T = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

T_x Translation um x , siehe I.2.1, S.5

$T_{\overline{\beta}}$ siehe II.3.1, S.28 bzw. V.3.1, S.76

τ_x siehe II.3.1, S.28 bzw. V.3.1, S.77

$(X, +)$ separable, metrisierbare, lokalkompakte, abelsche
topologische Gruppe

- χ_A Indikatorfunktion der Menge A
- Y_{2m} Kugelfunktion, siehe V.4.1, S.86
- Komposition
- * Faltung, siehe I.1.4, S.3
- ⊗ Produktmaßbildung
- $\|\cdot\|$ 1. euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$
- 2. Norm der Totalvariation auf $M^b(X)$
- 3. Operatornorm der behandelten Transformationen
- $\langle x, \tau \rangle = \tau(x) \quad (\tau \in \Gamma, x \in X)$, siehe I.3.1, S.8
- $\langle x, y \rangle$ Skalarprodukt für $x, y \in \mathbb{R}^n$
- $\hat{f}$ Fourier- bzw. Fourier-Plancherel-Transformierte von f,
siehe I.3.5, S.9 bzw. I.3.9, S.12
- $\hat{\mu}$ Fouriertransformierte von μ , siehe I.3.5, S.10

Literaturverzeichnis

1. G. E. Backus:

Geographical interpretation of measurements of average phase velocities of surface waves over great circular and semi-circular paths.

Bull. Seism. Soc. Am. 54 (1964), 571-610.

2. L. Brown, B. M. Schreiber, B. A. Taylor:

Spectral synthesis and the Pompeiu problem.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble 23 (1973), 125-154.

3. A. P. Calderon:

On the Radon transform and some of its generalizations.

Conf. on harmonic analysis in honor of A. Zygmund,

Vol I,II (Chicago 1981), 673-689, Wadsworth Math. Ser.,

Wadsworth, Belmont, Calif. 1983.

4. S. Campi:

On the reconstruction of a function on a sphere by its integrals over great circles.

Boll. Un. Mat. Ital. (5) 18-C (1981), 195-215.

5. A. M. Cormack:

The Radon transform on a family of curves in the plane, II.

Proc. Amer. Math. Soc. 86 (1982), 293-298.

6. A. M. Cormack:

The Radon transform on a family of curves in the plane.

Proc. Amer. Soc. 83 (1981), 325-330.

7. A. M. Cormack:
Representation of a function by its line integrals,
with some radiological applications.
J. Appl. Phys. 34 (1963), 2722-2727.
8. A. M. Cormack und E. T. Quinto:
A Radon transform on spheres through the origin in $\mathbb{R}^n$
and applications to the Darboux equation.
Trans. Amer. Soc. 260 (1980), 575-581.
9. P. Dierolf:
Zwei Räume regulärer temperierter Distributionen,
Habilitationsschrift, Univ. München (1978).
10. W. F. Eberlein:
Characterizations of Fourier-Stieltjes transforms.
Duke Math. J. 22 (1955), 465-468.
11. A. Erdelyi, W. Magnus, R. Oberhettinger und F. Tricomi:
Higher transcendental functions, Vol. II.
Mc Graw Hill, New York (1953).
12. P. Funk:
Über Flächen mit lauter geschlossenen Linien.
Math. Ann. 74 (1913), 278-300.
13. S. Helgason:
The Radon transform.
Birkhäuser, Boston (1980).

14. D. M. Oberlin:
 L^p - L^q mapping properties of the Radon transform.
Banach spaces, harmonic analysis and prob. theory,
LN Math. 995, Springer (1985), 95-102.
15. D. M. Oberlin und E. M. Stein:
Mapping properties of the Radon transform.
Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), 641-650.
16. D. Pompeiu:
Sur une propriete integrale des fonctions de deux
variables reelles.
Bull. Sci. Acad. Royale Belgique (5) 15 (1929), 265-269.
17. D. Pompeiu:
Sur une propriete des fonctions continues dependant de
plusieurs variables.
Bull. Sci. Math. (2) 53 (1929), 328-332.
18. E. T. Quinto:
Null spaces and ranges for the classical and spherical
Radon transforms.
J. Math. Anal. Appl. 90 (1982), 408-420.
19. W. Rudin:
Functional analysis.
Mc Graw Hill, New York (1973).
20. W. Rudin:
Real and complex analysis.
Mc Graw Hill, New York (1966).

21. W. Rudin:
Fourier analysis on groups.
John Wiley, New York (1962).
22. R. T. Seeley:
Spherical harmonics.
Amer. Math. Monthly 73 (1966), 115-121.
23. R. S. Strichartz:
Radon inversion - variations on a theme.
Amer. Math. Monthly 89 (1982), 377-384, 420-423.
24. M. Thoma:
Rekonstruktion von Funktionen auf der Kugeloberfläche
aus Großkreisintegralen.
Diplomarbeit, Univ. München (1984).
25. L. Zalcman:
Offbeat integral geometry.
Amer. Math. Monthly 87 (1980), 161-175.
26. L. Zalcman:
Analyticity and the Pompeiu problem.
Arch. Rational Mech. Anal. 47 (1972), 237-254.

Lebenslauf

Ernst Matthias Kulesa geboren am 06.02.1959 in Marburg/Lahn,
verheiratet seit dem 22.07.1983

Schulbildung 1965 - 1968 Volksschule Lüneburg
 1968 - 1977 Gymnasium in Lüneburg, Kassel und
 München
 Juni 1977 Abitur am Gisela-Gymnasium München
 1977 - 1979 Wehrdienst als Soldat auf Zeit
 1979 - 1984 Studium der Mathematik mit Nebenfach
 Angewandte Statistik an der Ludwig-
 Maximilians-Universität München
 Juni 1984 Diplom-Hauptprüfung in Mathematik
 ab 1984 Promotionsstudium der Mathematik

Tätigkeiten November 1984 bis Juli 1985
 Beschäftigung als hauptberufliche
 wissenschaftliche Hilfskraft am
 Mathematischen Institut der Ludwig-
 Maximilians-Universität München
 ab August 1985
 Halbtagesbeschäftigung bei der
 Vereinigten Krankenversicherung AG
 in München

